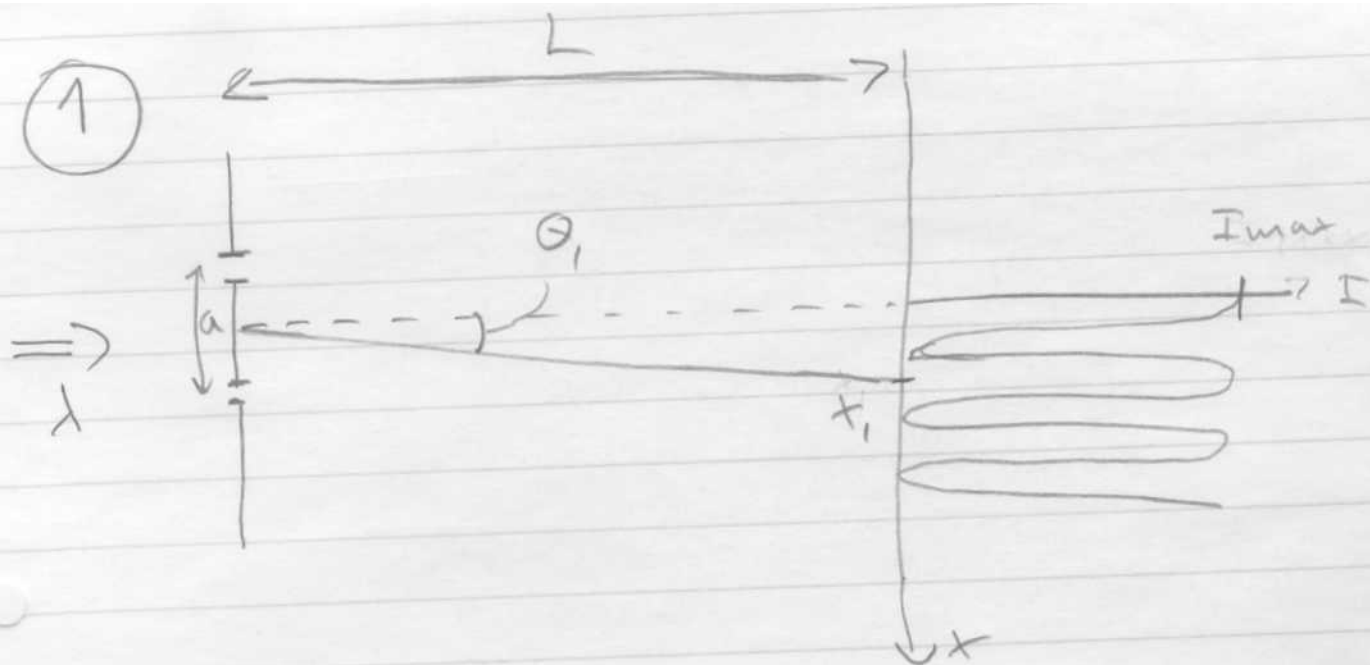


Preliminära lösningar

Vägg Fysik och Optik

2002-05-29

Anders Kottberg



$$\lambda = 514 \text{ nm}$$

$$L = 3.0 \text{ m}$$

$$x_1 = 0.27 \text{ mm} \quad \left\{ (x_1 - x_0) = x_1 - 0 = \text{Fransseparation} \right\}$$

$$I_{max} = 78 \text{ mW/cm}^2$$

a)

Villkor för max: $a \sin \theta = m \lambda$

litet vinkel $\Rightarrow \sin \theta_1 \approx \frac{x_1}{L}$, $m=1$

$$\Rightarrow \frac{a x_1}{L} = \lambda \quad \Rightarrow a = 5.7 \text{ mm}$$

b)

Ena spalten täcks av ett filter?

$$I = I_1 + I_2 + 2 \sqrt{I_1 I_2} \cos \delta$$

$$\begin{cases} I_{\max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \\ I_{\min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2} \end{cases}$$

1) Innan filter sätts dit

$$I_1 = I_2 = I_0$$

$$\begin{cases} I_{\max} = 2I_0 + 2I_0 = 4I_0 = 78 \text{ nW/cm}^2 \\ I_{\min} = 2I_0 - 2I_0 = 0 \end{cases}$$

2) Filter sätts in

$$I_1' = I_0, \quad I_2' = 0,15 I_0$$

$$\begin{aligned} I_{\max}' &= I_0 + 0,15 I_0 + 2\sqrt{I_0 \cdot 0,15 I_0} = \\ &= I_0 (1 + 0,15 + 2\sqrt{0,15}) = 1,92 I_0 \end{aligned}$$

$$I_{\min}' = I_0 (1 + 0,15 - 2\sqrt{0,15}) = 0,375 I_0$$

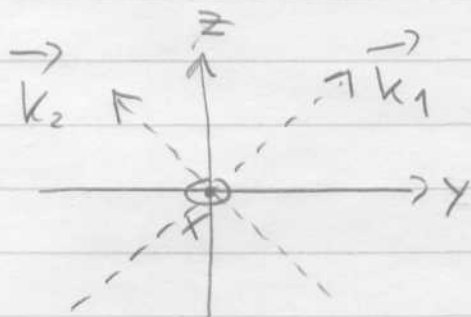
$$I_{\max} = 37 \text{ nW/cm}^2$$

$\Rightarrow$

$$I_{\min} = 7,3 \text{ nW/cm}^2$$

2

två vågor korsas! Enklare är att
välja koordinatsystem enligt figuren:



$$E_i = E_0 \cdot \hat{x} \cdot \sin(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega t)$$

$$\vec{k}_i = \frac{2\pi}{\lambda} (k_x \hat{x} + k_y \hat{y} + k_z \hat{z}) = \frac{2\pi}{\lambda} (k_x, k_y, k_z)$$

$$\vec{k}_1 = \frac{2\pi}{\lambda} \left(0, +\frac{1}{\sqrt{2}}, +\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$\vec{k}_2 = \frac{2\pi}{\lambda} \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, +\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$\vec{E}_{tot} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \quad (\text{enl. superpositionsprincipen})$$

$$\left\{ \sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \right\}$$

$$\vec{E}_{tot} = 2E_0 \hat{x} \cdot \left\{ \sin\left(\frac{1}{\sqrt{2}} k_z z - \omega t\right) \cdot \cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}} k_y y\right) \right\}$$

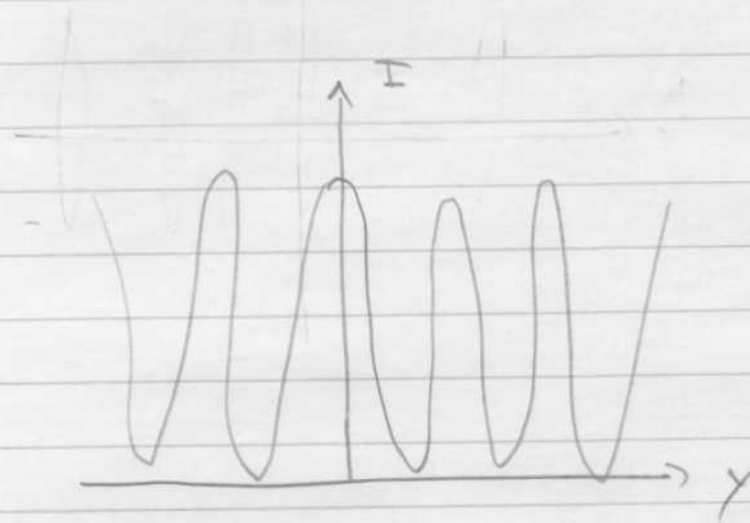
=> noder och bukarna längs $\hat{y}$

propagerings riktning $\hat{z}$

Alltså

Det blir en stående våg i y -led,
och en propagerande våg - z -led

Längs y -axeln finns ett
interferensmönster

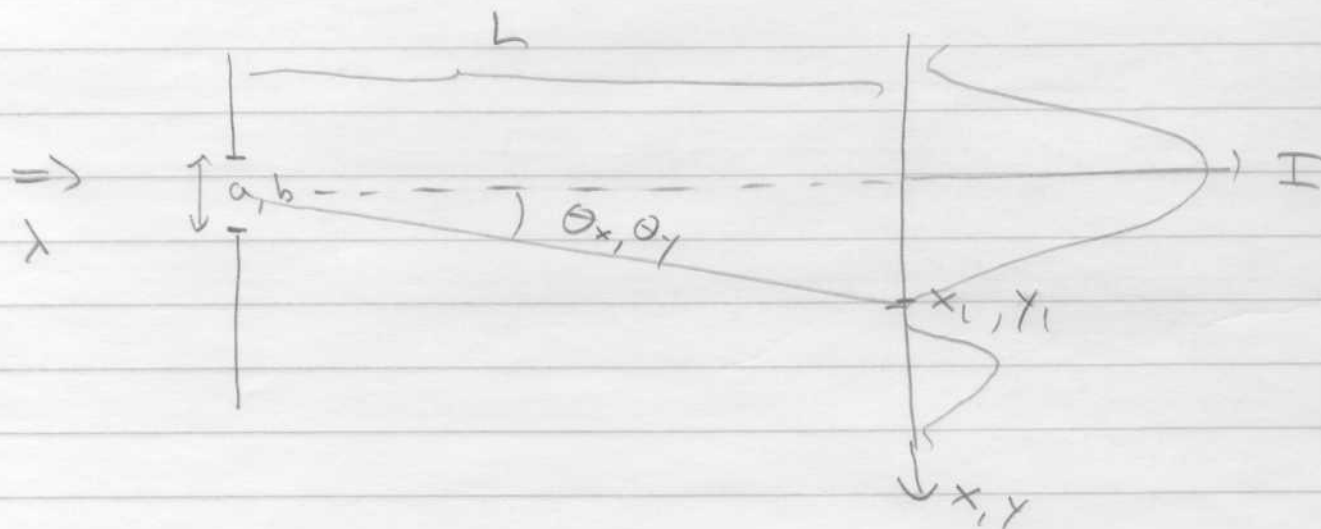


3

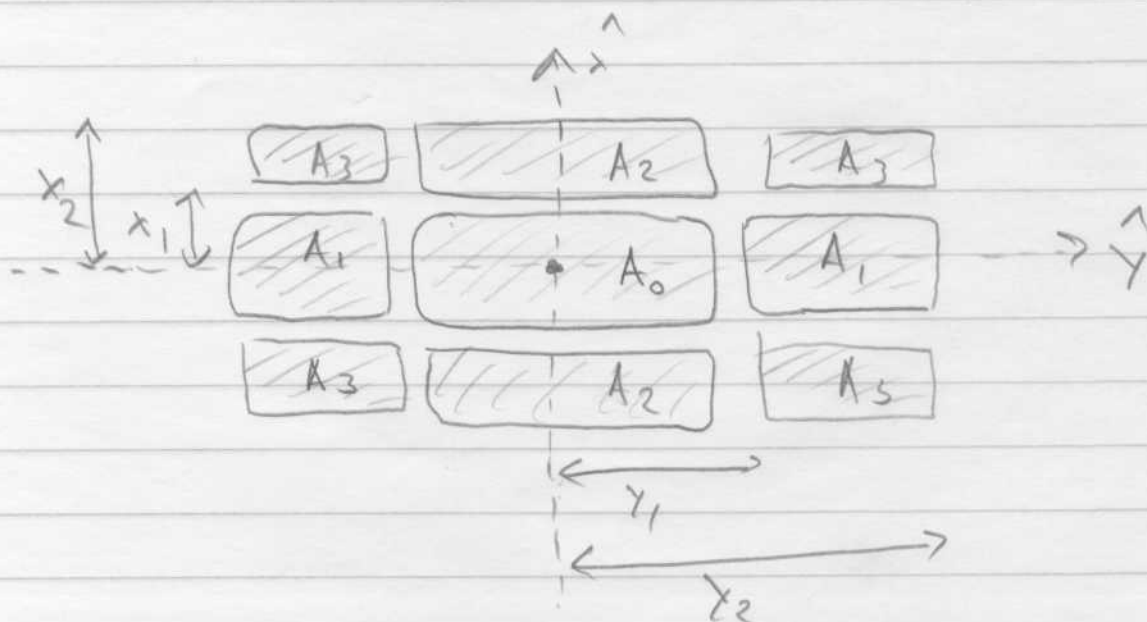
Rektangulär Wf



Rekt. Förd. sidan:



Central "vektangel" och de 8 närmaste:



Villkor för diff min:

$$\begin{cases} b \sin \theta_x = m_x \lambda \\ a \sin \theta_y = m_y \lambda \end{cases}$$

litet vinkel $\Rightarrow$
$$\begin{cases} \sin \theta_x \approx \frac{x}{L} \\ \sin \theta_y \approx \frac{y}{L} \end{cases}$$

$$\frac{bx}{L} = m_x \lambda \quad \text{och} \quad \frac{ay}{L} = m_y \lambda$$

$A_0 = 2x_1 \cdot 2y_1$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\lambda L}{b} \\ x_2 = \frac{2\lambda L}{b} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = \frac{\lambda L}{a} \\ y_2 = \frac{2\lambda L}{a} \end{cases}$$

Alltså: $A_0 = 2x_1 \cdot 2y_1 = \frac{4\lambda^2 L^2}{ab}$

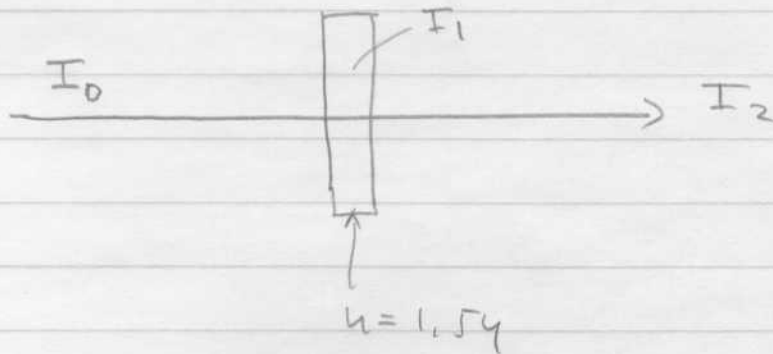
$$A_1 = 2x_1 \cdot (y_2 - y_1) = \frac{2\lambda^2 L^2}{ab} \quad (\text{två st.})$$

$$A_2 = (x_2 - x_1) \cdot 2y_1 = \frac{2\lambda^2 L^2}{ab} \quad (\text{två st.})$$

$$A_3 = (x_2 - x_1)(y_2 - y_1) = \frac{\lambda^2 L^2}{ab} \quad (\text{fyra st.})$$

4

I) normalt infall



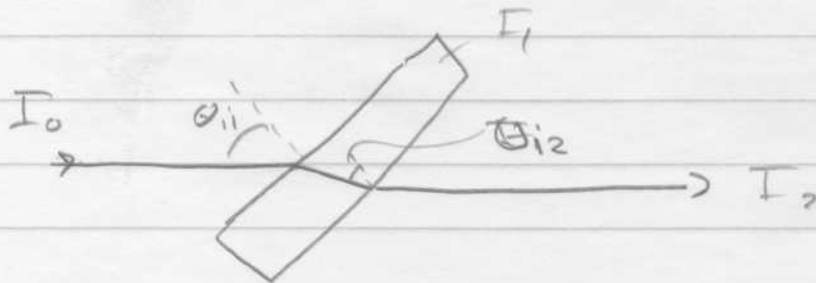
$$I_1 = I_0 \cdot (1 - R_1) \quad , \quad I_2 = I_1 \cdot (1 - R_2)$$

Cink pol $\Rightarrow$ lika mycket av båda
polarisationskomponenter ($\perp$ och $\parallel$)

$$R_{\parallel} = R_{\perp} = R_{2\perp} = R_{2\parallel} = \left(\frac{1-n}{1+n} \right)^2 = 0.0452$$

$$\Rightarrow I_2 = (1 - 0.0452)^2 \cdot I_0 = 0.912 I_0$$

II) rädda vinklar



$$\theta_{i1} = 70^\circ \quad , \quad \theta_{i2} = \theta_{t1}$$

$$\text{Snell} \Rightarrow 1 \cdot \sin 70^\circ = 1.54 \cdot \sin \theta_{i2}$$

$$\Rightarrow \theta_{i2} = 37.6^\circ$$

Cirk. pol. $\Rightarrow$ två lika stora komponenter,
även om de ligger ur fas

$$R_{\perp 1} = R_{\perp 2} = \left(\frac{\sin(\theta_{i1} - \theta_{i2})}{\sin(\theta_{i1} + \theta_{i2})} \right)^2 = 0.316$$

$$R_{\parallel 1} = R_{\parallel 2} = \left(\frac{\tan(\theta_{i1} - \theta_{i2})}{\tan(\theta_{i1} + \theta_{i2})} \right)^2 = 0.0405$$

$$I_{2\perp} = (1 - R_{\perp})^2 I_{0\perp} = 0.468 I_{0\perp}$$

$$I_{2\parallel} = (1 - R_{\parallel})^2 I_{0\parallel} = 0.921 I_{0\parallel}$$

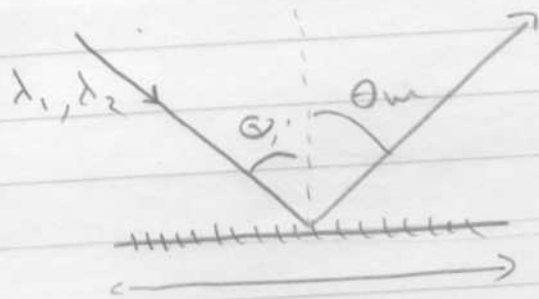
$$I_{0\perp} = I_{0\parallel} = I_0 / 2$$

$$\begin{aligned} I_2 &= I_{2\parallel} + I_{2\perp} = (0.921 + 0.468) \cdot \frac{I_0}{2} = \\ &= 0.694 I_0 \end{aligned}$$

Två komponenter som fortfarande är
ur fas. De är nu olika stora

$\Rightarrow$ elliptisk polarisation

5



$d = 10 \text{ mm}$, 6000 vitsar

$$\theta_i = 20^\circ$$

violetta Al-linja $\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 394.4032 \text{ nm} \\ \lambda_2 = 396.1527 \text{ nm} \end{cases}$

Gritta-ekv: $d (\sin \theta_m - \sin \theta_i) = m \lambda$

$$d = \frac{10 \text{ mm}}{6000} = 1.67 \text{ } \mu\text{m}$$

$$\sin \theta_m = \frac{m \lambda}{d} + \sin \theta_i$$

$$m=0 \Rightarrow \theta_{01} = \theta_{02} = 20^\circ, \Delta \theta_0 = 0$$

$$m=+1 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_{11} = 35.3^\circ \\ \lambda_{12} = 35.4^\circ \end{cases} \quad \Delta \lambda_1 = 0.07^\circ$$

$$m=+2 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_{21} = 54.6^\circ \\ \lambda_{22} = 54.8^\circ \end{cases} \quad \Delta \lambda_2 = 0.2^\circ$$

$$m \geq +3 \Rightarrow \text{saknays}$$

$$m=-1 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_{-11} = 6.05^\circ \\ \lambda_{-12} = 5.99^\circ \end{cases} \quad \Delta \lambda_{-1} = 0.06^\circ$$

$$m = -2 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_{-21} = -7.54^\circ \\ \lambda_{-22} = -7.66^\circ \end{cases} \quad \Delta\lambda_{-2} = 0.12^\circ$$

$$m = -3 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_{-31} = -21.6^\circ \\ \lambda_{-32} = -21.8^\circ \end{cases} \quad \Delta\lambda_{-3} = 0.2^\circ$$

$$m = -4 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_{-41} = -37.2^\circ \\ \lambda_{-42} = -37.5^\circ \end{cases} \quad \Delta\lambda_{-4} = 0.3^\circ$$

$$m = -5 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_{-51} = -57.3^\circ \\ \lambda_{-52} = -57.8^\circ \end{cases} \quad \Delta\lambda_{-5} = 0.5^\circ$$

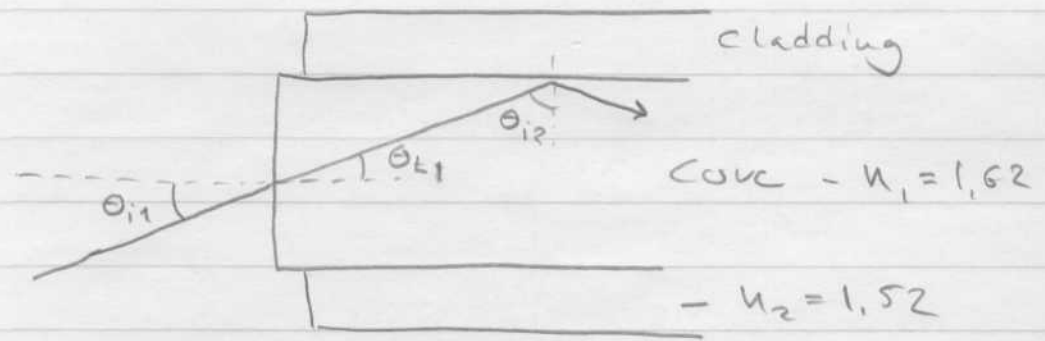
$$m \leq -6 \Rightarrow \text{saknas}$$

Villkor för upplösning:

$$Nm \geq \frac{\lambda}{\Delta\lambda} \approx 220$$

$\Rightarrow$ Gutt och väl upplöst - ringar
För alla ordningar som
den villte

6



För att Fibern ska funka krävs att θ_{i2} är större än kritiska vinkeln för totalreflektion.

$$n_1 \sin \theta_{i2} \geq n_2 \cdot \sin 90^\circ = n_2$$

$$\Rightarrow \sin \theta_{i2} \geq \frac{n_2}{n_1} \quad \text{eller} \quad \sin \theta_c = \frac{n_2}{n_1}$$

$$\text{Geometri} \Rightarrow \theta_{i2} + \theta_{t1} = 90^\circ \Rightarrow \theta_{t1}$$

$$\begin{aligned} \text{Snell} \Rightarrow n_1 \sin \theta_{i1} &= n_1 \sin \theta_{t1} = \\ &= n_1 \sin(90^\circ - \theta_{i2}) = n_1 \cos(\theta_{i2}) \end{aligned}$$

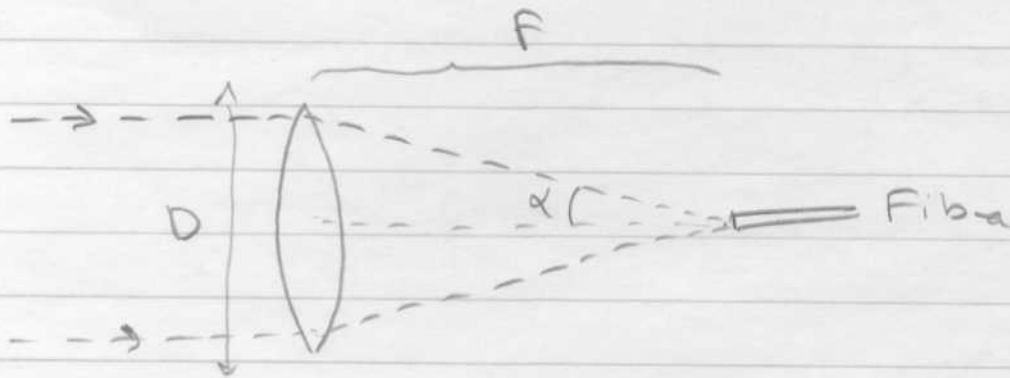
$$\cos^2 \theta_c = 1 - \sin^2 \theta_c = 1 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 = \frac{1}{n_1^2} (n_1^2 - n_2^2)$$

$$\sin \theta_{i1} \leq n_1 \cdot \frac{1}{n_1} \sqrt{n_1^2 - n_2^2} = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$$

Detta sa alltså gränsvärdet för hur stor infallsvinkeln får vara

Låt oss anta att vi vill få in så mycket ljus som möjligt från en plan väg

Man bör använda en positiv lens och placera fiber ändan i fokuset:



Vinkel α ges av linsen: $\tan \alpha = \frac{D}{2F}$

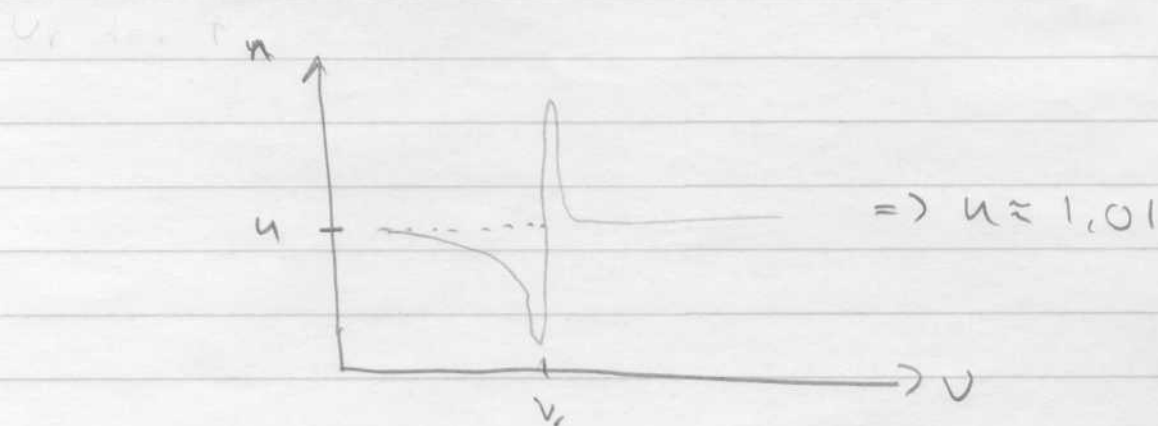
Vi vill göra α så stor som möjligt men högst så stor som det kritiska värdet θ_c . Bäst blir det alltid för $\alpha = \theta_c$

$$\Rightarrow \arctan\left(\frac{D}{2F}\right) = \arcsin\left(\sqrt{n_1^2 - n_2^2}\right)$$

7

$$\lambda_0 = 589.6 \text{ nm}, \quad \nu_0 = \frac{c_0}{\lambda_0} = 5,088 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$$

Ur den första figuren förs brytningsindex
vid resonansen



$$\Rightarrow \nu_f = c = \frac{c_0}{n} \approx 2,970 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

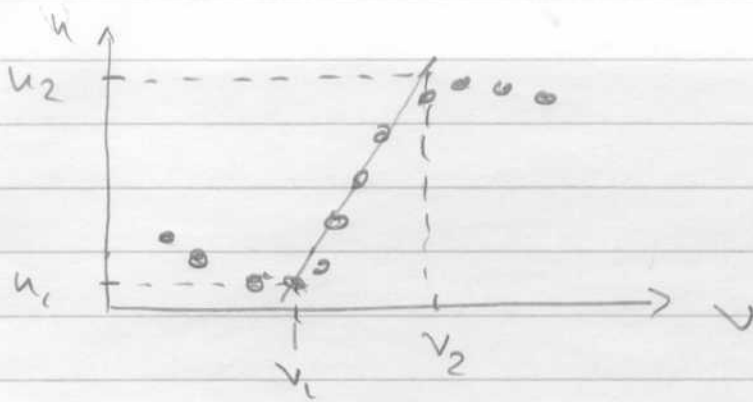
$$\nu_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = c + k \frac{\partial c}{\partial k},$$

$$\frac{\partial c}{\partial k} = - \frac{c_0}{n^2} \frac{dn}{dk}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow dk = - \frac{2\pi}{\lambda^2} d\lambda$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \nu_g &= c + \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \left(- \frac{c_0}{n^2} \right) \left(- \frac{\lambda^2}{2\pi} \right) \cdot \frac{dn}{d\lambda} = \\ &= c + c \frac{\lambda}{n} \frac{dn}{d\lambda} = c \left(1 + \frac{\lambda}{n} \frac{dn}{d\lambda} \right) \end{aligned}$$

Ur den andra figuren förs ett ungefärligt
värde på derivatan vid $\nu = \nu_0$



$$\frac{du}{d\nu} \approx \frac{\Delta u}{\Delta \nu} = \frac{u_2 - u_1}{\nu_2 - \nu_1}, \quad \frac{du}{d\lambda} \approx \frac{\Delta u}{\Delta \lambda}$$

$$\text{f.ex.} \begin{cases} u_2 = 1,2 \\ \nu_2 = \nu_0 + 0,12 \text{ MHz} \end{cases} \quad \begin{cases} u_1 = 0,8 \\ \nu_1 = \nu_0 - 0,19 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Delta u = 0,4 \text{ u.u.} \quad \text{und} \quad \Delta \nu = 0,31 \text{ MHz}$$

$$\frac{d\nu}{d\lambda} = -\frac{c}{\lambda^2} \Rightarrow \Delta \nu = -\frac{c}{\lambda^2} \cdot \Delta \lambda$$

$$\Rightarrow v_g \approx c \left(1 \mp \frac{\lambda}{u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta \nu \cdot \lambda^2} \right) = c \left(1 \mp \frac{c \Delta u}{u \lambda \Delta \nu} \right) =$$

$$= 9,1 \cdot 10^{17} \text{ m/s}$$

