

SUPERPOSITION

Antag att ψ_1 och ψ_2 är lösningar till
vågsekvationen

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

DD är också en linjärkombination
en lösning:

$$\psi_{\text{tot}} = a \psi_1 + b \psi_2$$

$\Rightarrow$ Två (eller fler) vågor kan adderas

$$\vec{E}_{\text{tot}} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

$$\vec{B}_{\text{tot}} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$$

TVå vågor med samma frekvens och samma vibration

Amplitud och fas är olika

$$\begin{cases} \vec{E}_1 = \vec{E}_{01} \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_1) \\ \vec{E}_2 = \vec{E}_{02} \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_2) \end{cases}$$

(vi antar att $\vec{E}_{01}$ och $\vec{E}_{02}$ är parallella)

Vi tittar på totala fältet i en pkt $\vec{r}$.

$$\text{då} \quad \begin{cases} (\vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_1) = \alpha_1 \\ (\vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_2) = \alpha_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{E}_{\text{tot}} = \vec{E}_{01} \sin(\alpha_1 - \omega t) + \vec{E}_{02} \sin(\alpha_2 - \omega t)$$

$\vec{E}_{\text{tot}}$ är en harmonisk våg med frekvens ω

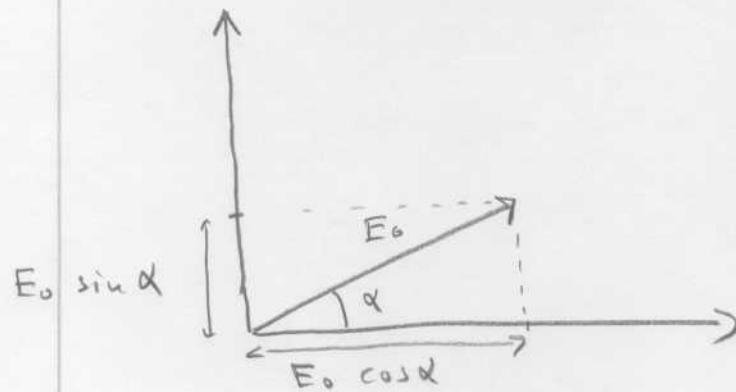
Vad har $\vec{E}_{\text{tot}}$ för amplitud och fas?

Fasdiagramm

Låt en vdg i en punkt representeras av
en vektor i ett Fasdiagram

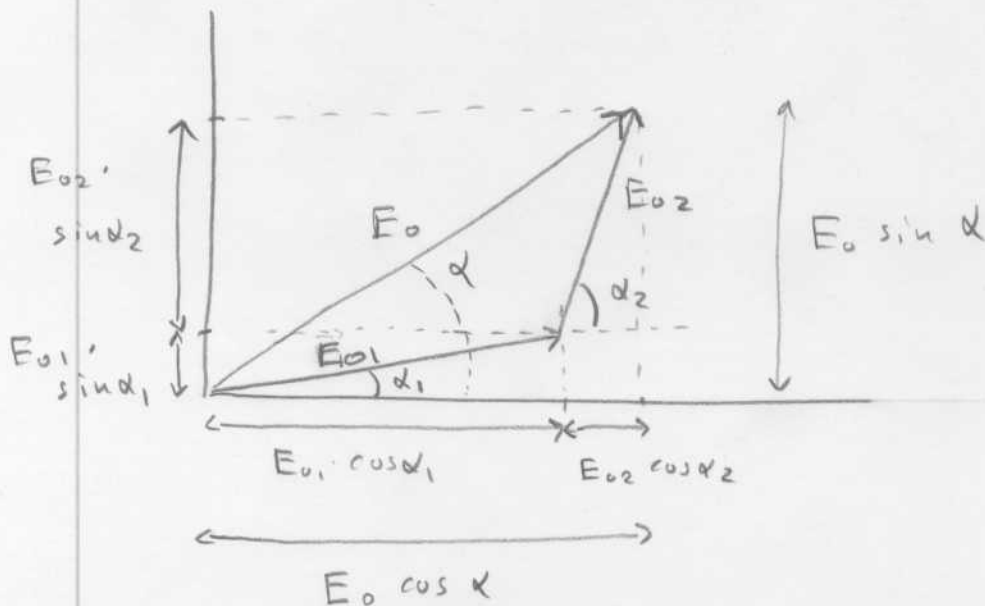
Vdgens amplitud $\rightarrow$ vektorns belopp

Vdgens specifika fas $\rightarrow$ vektorns vinkel mot
x-axeln



$$E = E_0 \cdot \sin(\alpha - \omega t)$$

Vektoraddition motsvarar dS superposition



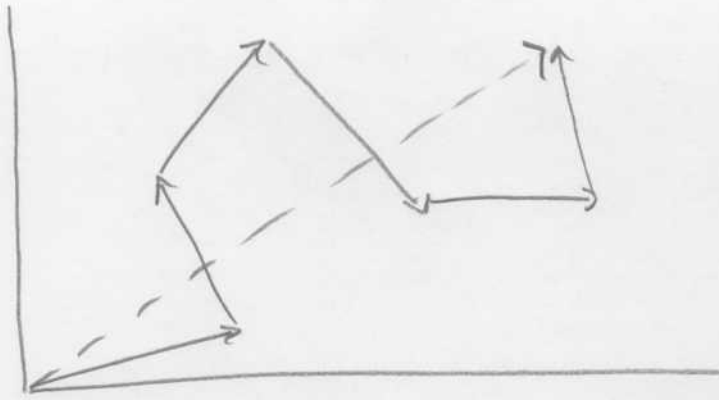
$$E_{tot} = E_1 + E_2 = E_0 \cdot \sin(\alpha - \omega t)$$

$$\text{trig.} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{E_{01} \sin \alpha_1 + E_{02} \sin \alpha_2}{E_{01} \cos \alpha_1 + E_{02} \cos \alpha_2}$$

$$\text{Pyth.} \Rightarrow E_0^2 =$$

$$= (E_{01} \cos \alpha_1 + E_{02} \cos \alpha_2)^2 + (E_{01} \sin \alpha_1 + E_{02} \sin \alpha_2)^2$$

Superposition or Induced vector:



$$E_0^2 = \left(\sum_{i=1}^N E_{0i} \cos \alpha_i \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^N E_{0i} \sin \alpha_i \right)^2$$

$$\tan \alpha = \frac{\sum_{i=1}^N E_{0i} \sin \alpha_i}{\sum_{i=1}^N E_{0i} \cos \alpha_i}$$

$$E_o^2 = \left(\sum_{i=1}^N E_{oi} \cos \alpha_i \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^N E_{oi} \sin \alpha_i \right)^2$$

omskrivning ! :

$$\left(\sum_{i=1}^N E_{oi} \cos \alpha_i \right)^2 = \sum_{i=1}^N E_{oi}^2 \cos^2 \alpha_i + 2 \sum_{j>i}^N \sum_{i=1}^N E_{oi} E_{oj} \cos \alpha_i \cos \alpha_j$$

$$\left(\sum_{i=1}^N E_{oi} \sin \alpha_i \right)^2 = \text{----- analogt -----}$$

$$\Rightarrow E_o^2 = \sum_{i=1}^N E_{oi}^2 \left(\overbrace{\sin^2 \alpha_i + \cos^2 \alpha_i}^{=1} \right) + 2 \sum_{j>i}^N \sum_{i=1}^N \underbrace{(\cos \alpha_i \cos \alpha_j + \sin \alpha_i \sin \alpha_j)}_{\cos(\alpha_j - \alpha_i)} E_{oi} E_{oj}$$

$$E_o^2 = \sum_{i=1}^N E_{oi}^2 + 2 \sum_{j>i}^N \sum_{i=1}^N E_{oi} E_{oj} \cos(\alpha_j - \alpha_i) =$$

$$= A + B$$

Flera källor med slumpmässiga fas (inkohärla)

N sf. källor. Alla har samma frekvens, men den relativa fasen dem emellan är helt slumpmässig.

$\Rightarrow \cos(\alpha_j - \alpha_i)$ blir för varje par ett slumpmässigt tal mellan -1 och 1

Stort $N \Rightarrow B \rightarrow 0$

$$\Rightarrow E_o^2 = A = \sum_{i=1}^N E_{oi}^2$$

Om alla amplituder är lika $E_{oi} = E_{o1}$

$$\Rightarrow E_o^2 = N E_{o1}^2$$

$$E_o = \sqrt{N} E_{o1}$$

Irradiansen $E_e = I \sim E_o^2$

$$\Rightarrow I = N I_1, \text{ för inkohärla källor}$$

koherenta källor (alla källor i fas)

$$E_o^2 = A + B, \quad \alpha_i = \alpha_j \quad \text{För alla } i, j$$

$$\Rightarrow \cos(\alpha_j - \alpha_i) = \cos 0 = 1$$

$$E_o^2 = \sum_{i=1}^N E_{o,i}^2 + 2 \sum_{j>i}^N \sum_{i=1}^N E_{o,i} E_{o,j}$$

Om alla amplituder är lika $E_{o,i} = E_{o,j} = E_{o,1}$

$$E_o^2 = \left(\sum_{i=1}^N E_{o,1} \right)^2$$

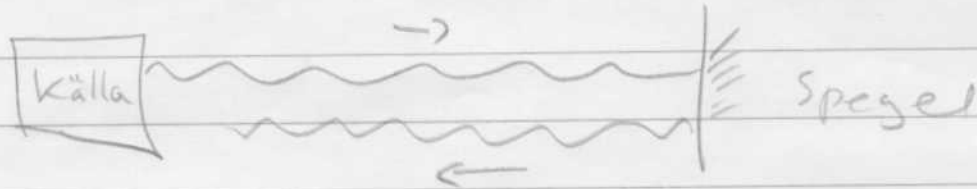
$$\Rightarrow E_o^2 = \left(N E_{o,1} \right)^2 = N^2 E_{o,1}^2$$

$$E_o = N E_{o,1}$$

$$I = N^2 I_1, \quad \text{för källor i fas}$$

STÅENDE VÅGOR

Antag två motriktade vågor (i övrigt idealiska)



(1D)

$$\begin{cases} E_1 = E_0 \sin(kz - \omega t) \\ E_2 = E_0 \sin(kz + \omega t) \end{cases}$$

Superpositionsprincipa $\Rightarrow E_{\text{tot}} = E_1 + E_2$

$$E_{\text{tot}} = E_0 \left(\sin(kz - \omega t) + \sin(kz + \omega t) \right)$$

$$\left\{ \sin \alpha + \sin \beta = 2 \cdot \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cdot \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \right\}$$

$$E_{\text{tot}} = 2E_0 \cdot \sin kz \cdot \cos \omega t$$

Rumsfördelning och tidsfördelningen
har separerats i två faktorer

Beakta:

① En tid då $\cos \omega t = 0$

$\Rightarrow E_{\text{tot}} = 0$ överallt

② En tid då $\cos \omega t = 1$

$\Rightarrow E_{\text{tot}} = 2E_0 \sin kz$

③ En plats där $\sin kz = 0$

$\Rightarrow E_{\text{tot}} = 0$ alltid "NOD"

④ En plats där $\sin kz = 1$

$\Rightarrow E_{\text{tot}} = 2E_0 \cos \omega t$ "BUK"

~~OH 6-1~~
OH 8-2

~~Anim 6-1~~
OH 8-3

~~Anim 6-2~~
OH 8-4

En stående våg transporterar ingen energi (och inga våvelsändning)

Om det ska ett fasskill: E_1 och/eller E_2 :

~~$\Rightarrow \frac{1}{2} A_0$~~

$$E = 2E_0 \cdot \sin(kx + \varphi_1 + \varphi_2) \cdot \cos(\omega t + \varphi_1 - \varphi_2)$$

> Translation av mönstret (och ändring av temporala faser)

Vågor med olika frekvens

$$\begin{cases} E_1 = E_0 \sin(k_1 z - \omega_1 t) \\ E_2 = E_0 \sin(k_2 z - \omega_2 t) \end{cases}$$

$$E_{\text{tot}} = E_1 + E_2 = E_0 (\sin(k_1 z - \omega_1 t) + \sin(k_2 z - \omega_2 t))$$

$$\left\{ \sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cdot \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \right\}$$

$$E_{\text{tot}} = 2 E_0 \sin \left\{ \frac{k_1 + k_2}{2} z - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \right\} \cos \left\{ \frac{k_1 - k_2}{2} z - \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \right\}$$

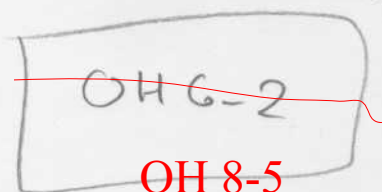
$$\text{Låt: } \begin{cases} \omega_p = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \\ k_p = \frac{k_1 + k_2}{2} \end{cases} \quad \text{och} \quad \begin{cases} \omega_g = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \\ k_g = \frac{k_1 - k_2}{2} \end{cases}$$

$$E_{\text{tot}} = 2 E_0 \sin(k_p z - \omega_p t) \cos(k_g z - \omega_g t)$$

Alltså: En produkt av två vågor. En med hög frekvens, ω_p , och en med låg, ω_g .

$\Rightarrow$ En våg med frekvensen ω_p som moduleras med ω_g

"SVÄVNING" ("Beats")



svår frekvens ("beat frequency")

$$\omega_b = 2 \omega_g = \omega_1 - \omega_2$$

Vågor "pulsera" med frekvensen ω_b

Vågkomponenternas hastighet

$$(v = c = v \cdot \lambda = \frac{\omega}{k})$$

Den snabbt oscillerande komp. : "Fasen"

$$v_p = \frac{\omega_p}{k_p} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{k_1 + k_2} \quad \text{"Fas hastighet"}$$

Enveloppen : "Gruppen"

$$v_g = \frac{\omega_g}{k_g} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2} \quad \text{"Grupp hastighet"}$$

Antag att ω_1 och k_1 ligger nära ω_2 och k_2

$$\Rightarrow v_p = \frac{\omega}{k} \quad \text{och} \quad v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

$$\Rightarrow v_g = \frac{d}{dk} (k v_p) = v_p + k \frac{dv_p}{dk}$$

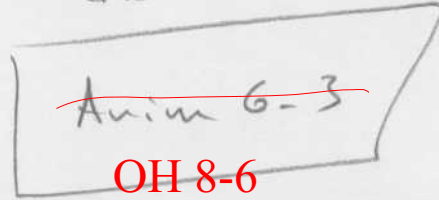
$\frac{dv_p}{dk}$: "Dispersionen" säga hur fashastigheten

varierar med våglängd

Utbredning i vakuum

Alla våglängder propagerar lika snabbt
($n=1$ för alla λ)

$$\Rightarrow \frac{dv_p}{dk} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_g = v_p$$



Medium $n \neq 1$

$$v_p = \frac{c}{n} \quad \Rightarrow \quad \frac{dv_p}{dk} = -\frac{c}{n^2} \cdot \frac{dn}{dk}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \frac{dk}{d\lambda} = -\frac{2\pi}{\lambda^2} \quad \Rightarrow \quad dk = -\frac{2\pi}{\lambda^2} d\lambda$$

$$\Rightarrow v_g = v_p + \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \left(-\frac{c}{n^2}\right) \cdot \frac{dn}{d\lambda} \cdot \left(-\frac{\lambda^2}{2\pi}\right) =$$

$$= v_p + \frac{c}{n} \frac{\lambda}{n} \frac{dn}{d\lambda} =$$

$$= v_p \left(1 + \frac{\lambda}{n} \frac{dn}{d\lambda}\right)$$

Normal fallet:

högre frekvens bryts mer

"Normal dispersion"

$$\frac{dn}{d\lambda} < 0 \Rightarrow v_g < v_p$$

~~Anim 6-4~~
OH 8-7

Om lägre frekvens bryts mer:

"Anomal dispersion"

$$\frac{dn}{d\lambda} > 0 \Rightarrow v_g > v_p$$

~~Anim 6-5~~
OH 8-8

"Vågpaketet" transporterar energi
med hastigheten v_g !