

KOHERENS

Ett mått på hur pass mycket vågor är i fas, eller har ett bestämt fasförhållande

För att vågor ska kunna interferera så måste de vara koherenta.

FOURIER ANALYS

Alla periodiska fkn. $f(t)$, med period T , kan skrivas som en ändlig summa av harmoniska vågor. Detta gäller även anharmoniska vågor.

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos m\omega t + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin m\omega t$$

(där $\omega = \frac{2\pi}{T}$)

"Amplituderna" a_0 , a_m och b_m är:

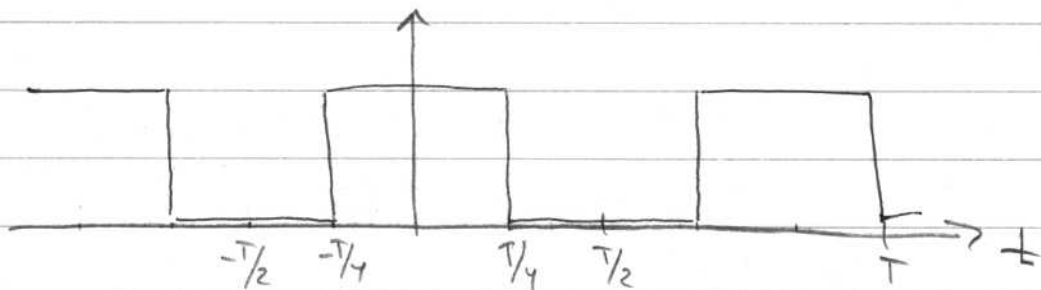
$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt$$

$$a_m = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos m\omega t \, dt$$

$$b_m = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin m\omega t \, dt$$

Exempel: Fyrbakad

$$f(t) = \begin{cases} 0 & -T/2 < t < -T/4 \\ 1 & -T/4 < t < T/4 \\ 0 & T/4 < t < T/2 \end{cases} \quad \text{c.s.v.}$$



En jämn funktion! $\Rightarrow$ inga sinus termer

$$\Rightarrow f(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left(\cos \omega t - \frac{1}{3} \cos 3\omega t + \frac{1}{5} \cos 5\omega t \dots \right)$$

04 19-2

i komplex form blir en "Fourier summa"

$$F(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-in\omega t}$$

där $c_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) e^{in\omega t} dt$

• En icke-periodisk fkn: ($T \rightarrow \infty$)

Fourier summa kan generaliseras
till en integral

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

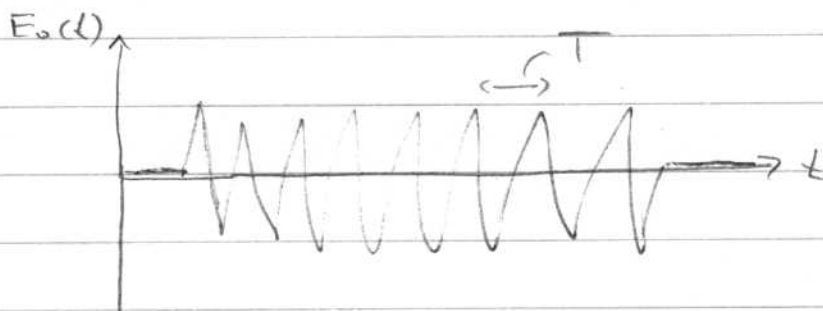
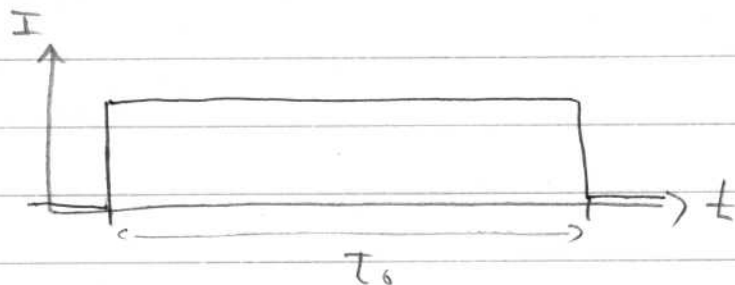
$$g(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{i\omega t} dt$$

FOURIERTRANSFORM - PAR

$g(\omega)$ har ett kontinuerligt
spektrum av frekvenser

Linspulser

Allt viktigt ena kan betraktas som pulser



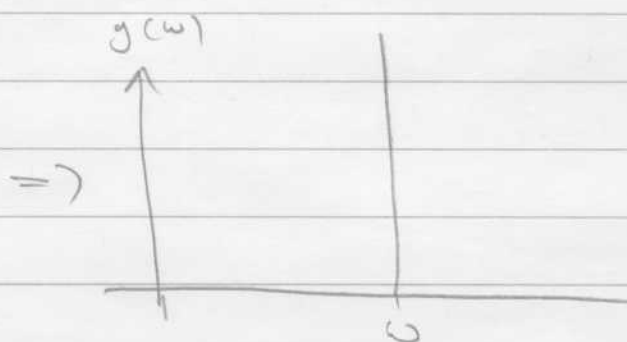
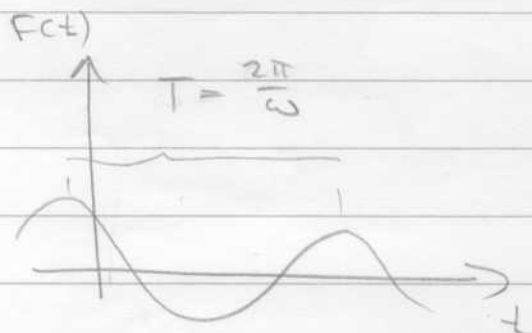
Alltså är inga riktiga källor helt monokromatiska. De innehåller alltid ett band av frekvenser. Denna "grupp" av frekvenser kallas för ett "vågpaket"

Vilken frekvensbredd har en viss källa som δ -pulslängd av tid T_0 ?

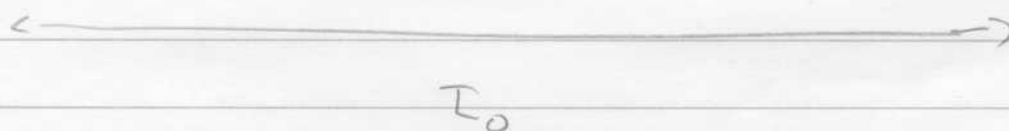
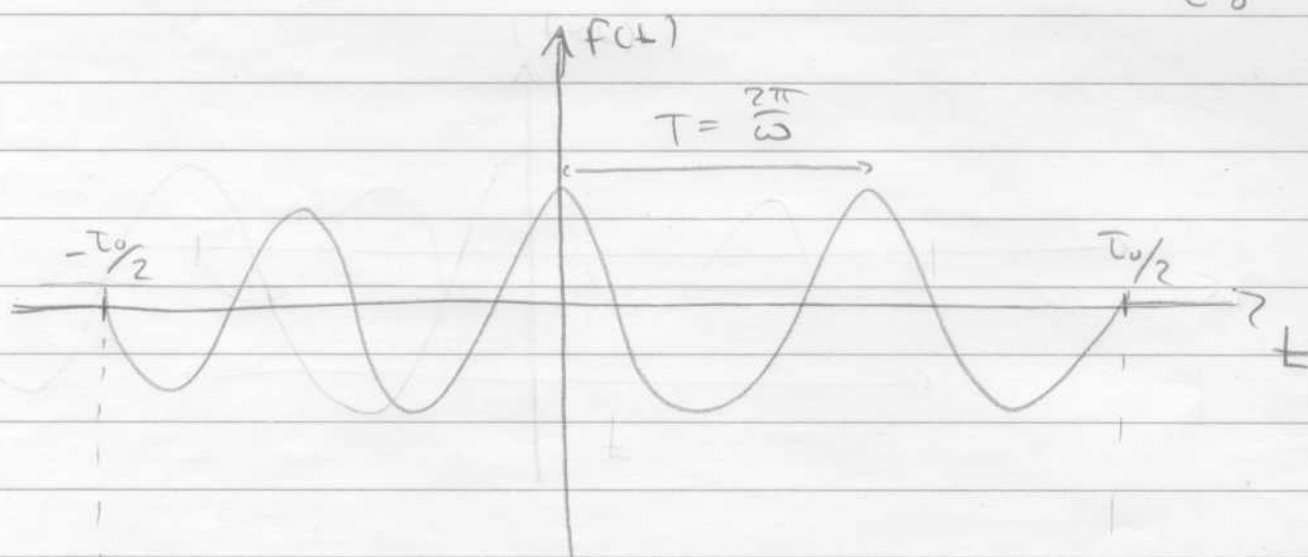
- Perfekt monokromatisk ljuskälla, startade lysa vid $t = -\infty$ och är på oändligt länge

$$E(t) = A \cdot e^{-i\omega t}$$

$\Rightarrow$ endast en Fourierkomponent, med frekvens ω



- En mer realistisk ljuskälla, påslagen en tid T_0



$$F(t) = \begin{cases} e^{-i\omega_0 t}, & -\tau_0/2 < t < \tau_0/2 \\ 0, & \text{alla andra } t \end{cases}$$

Fouriertransforma ger Fickesspektrum

$$g(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\tau_0/2}^{\tau_0/2} e^{-i\omega_0 t} \cdot e^{i\omega t} dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\tau_0/2}^{\tau_0/2} e^{i(\omega - \omega_0)t} dt = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{e^{i(\omega - \omega_0)t}}{i(\omega - \omega_0)} \right]_{-\tau_0/2}^{\tau_0/2} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i(\omega - \omega_0)} \left(e^{i(\omega - \omega_0)\frac{\tau_0}{2}} - e^{-i(\omega - \omega_0)\frac{\tau_0}{2}} \right) =$$

$$\left\{ \text{euler} \Rightarrow \frac{1}{2i} (e^{ix} - e^{-ix}) = \sin x \right\}$$

$$= \frac{1}{\pi(\omega - \omega_0)} \cdot \sin \left\{ (\omega - \omega_0) \frac{\tau_0}{2} \right\} =$$

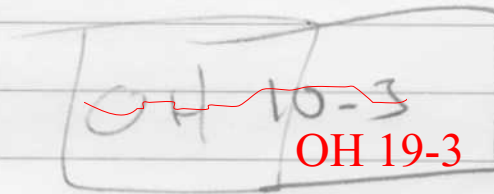
$$= \frac{\tau_0}{2\pi} \left(\frac{\sin \left\{ (\omega - \omega_0) \frac{\tau_0}{2} \right\}}{\frac{\tau_0}{2} (\omega - \omega_0)} \right) = \frac{\tau_0}{2\pi} \frac{\sin u}{u}$$

$$\text{där } u = \frac{\tau_0}{2} (\omega - \omega_0)$$

$$\frac{\sin u}{u} \rightarrow 1 \quad \text{d.h.} \quad u \rightarrow 0$$

$$g(\omega) \rightarrow \frac{\bar{E}_0}{2\pi} \quad \text{d.h.} \quad \omega \rightarrow \omega_0$$

$$g(\omega) = 0 \quad \text{d.h.} \quad \omega = \omega_0 \pm \frac{2\pi m}{T_0}, \quad m=1, 2, \dots$$



$g^2(\omega)$ kaltes effizienzkriterium.

Beschreibe "Irradianzen" von $P_{\text{H}}(\omega)$

Praktisch folgt all effizient: Feste Wert

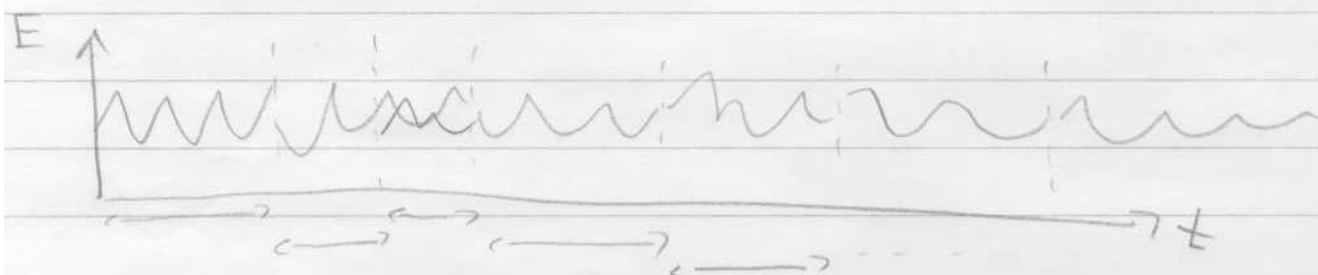
$$\text{Def: } \Delta\omega = \frac{2\pi}{T_0} \Rightarrow \Delta\nu = \frac{1}{T_0}$$

$\Delta\omega(\Delta\nu)$ zu "Linienbreiten" ρ
erhöht. ρ

kurze $T_0 \Rightarrow$ breitere $\Delta\omega$

Temporal coherence

Alla kontinuerliga källor har slumpmässiga fcs fluktuationer.



Gemensamt längd p.d. "prägelse" för en viss källa:

"kohärenstiden", $\bar{\tau}_0$

"kohärenslängd": $l_t = c \bar{\tau}_0$

beskriver del gemensamt våglängds utsträckning

$$l_t = \frac{c}{\Delta \nu} \quad , \quad l_t = \frac{\lambda^2}{\Delta \lambda}$$

För att två ett interferensmönster två inte vägskillnader vara större än l_t

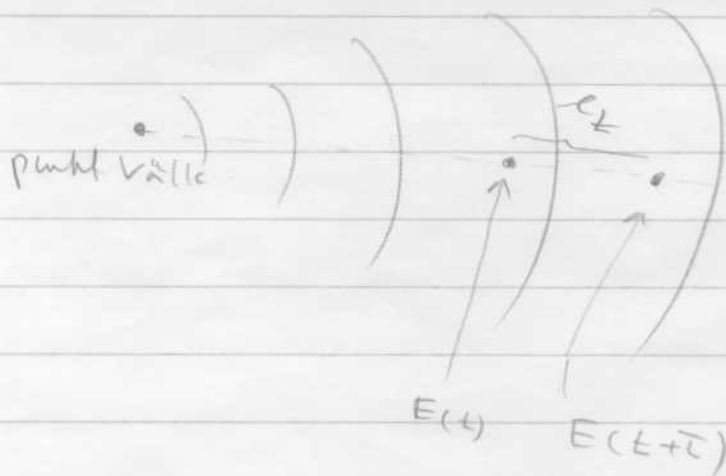
Ex: vitt ljus $l_t \approx 1-2 \text{ nm}$

Laser ; ~~för~~ f.d. ngn. dm till flera km.

Spatieell kohärens

N

Temporal kohärens: korrelation i en punkt mellan två vågor som propagert olika tider.

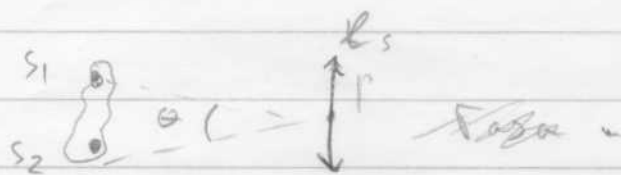


Svara mot en våg som har propagert olika tider

l_t = longitudinella (temporal) kohärens längd

Spatieel kohärens: korrelation vid en tid mellan två olika punkter.

Antag en källa med ändlig utsträckning

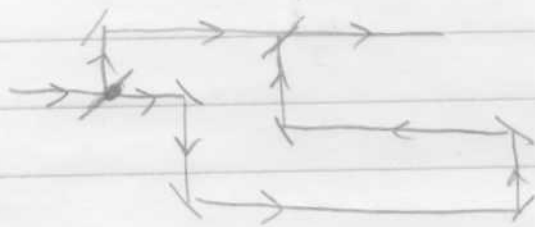


Fasor för vågor från S_1 och S_2 är aldrig ~~korrelerade~~ korrelerade.

Storleka (spatiella) kohärens-längder:

$$l_s < \frac{\lambda}{\theta}$$

Partiell kohärens



Anslaget är stråle som uppdelats i två. Den ena propagera en längre sträcka innan de åter förenas

Före uppdelning: $E_f = E_0 f \cdot e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$

Efter att förning har den ena propagat en längre sträcka, och en längre tid.

i en punkt $\vec{r}$ (t.ex. $\vec{r} = \vec{0}$)

$$\begin{cases} E_1 = E_{01} \cdot e^{i\omega t} \\ E_2 = E_{02} \cdot e^{i\omega(t+\tau)} \end{cases}, \tau: \text{skillnad i tid}$$

$$E_{\text{tot}} = E_1 + E_2$$

$$I_{\text{tot}} = \epsilon_0 c \langle (E_1 + E_2) \cdot (E_1^* + E_2^*) \rangle =$$

$$= I_1^* + I_2 + \epsilon_0 c \cdot \langle E_1 \cdot E_2^* + E_2 \cdot E_1^* \rangle$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \text{a } z + z^* = a + ib + a - ib = 2a = 2 \cdot \text{Re}[z] \end{aligned} \right\}$$

$$I_{\text{tot}} = I_1 + I_2 + 2\epsilon_0 c \cdot \text{Re}[\langle E_1 E_2^* \rangle]$$

Definiera ett normaliserat fält

$$\psi \equiv e^{i\omega t} \Rightarrow \begin{cases} E_1 = E_{01} \cdot \psi(t) \\ E_2 = E_{02} \cdot \psi(t+\tau) \end{cases}$$

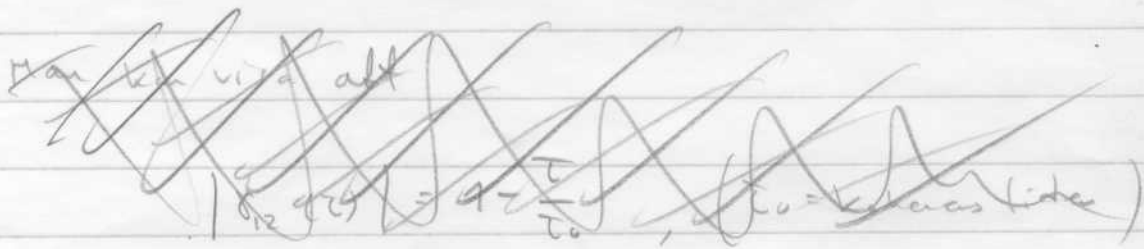
$$\Rightarrow I_{\text{tot}} = I_1 + I_2 + 2 E_{01} E_{02} \cdot \text{Re} [\langle \psi(t) \cdot \psi(t+\tau) \rangle]$$

$$\Rightarrow I_{\text{tot}} = I_1 + I_2 + 2 \sqrt{I_1 I_2} \cdot \text{Re} [\gamma_{12}(\tau)]$$

$$\text{där } \gamma_{12}(\tau) = \langle \psi(t) \cdot \psi(t+\tau) \rangle$$

är den "normaliserade korrelationsfunktionen"

ökande $\tau \Rightarrow$ allt större tidsbörvart av
förskillnaderna $\Rightarrow |\gamma_{12}(\tau)|$ minskar
 $\Rightarrow$ allt mindre interferens



$\tau \gg T_0 \Rightarrow$ inga kohärenz alls

$\gamma_{12}(\tau)$ kallas också "kohärensgreda"

Visibilitet

$$V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$$

Hur blir V för varierande kohärensgrad?

I) Helt inkohärent strål

$$\gamma_{12} = 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow I &= I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cdot \operatorname{Re}[\gamma_{12}(\tau)] = \\ &= I_1 + I_2 = 2I_0 \quad (\text{om } I_1 = I_2 = I_0) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow I_{\max} = I_{\min} = 2I_0 \quad (\text{konstant})$$

$$\Rightarrow V = \frac{2I_0 - 2I_0}{2I_0 + 2I_0} = 0$$

inga interferencestråk!

II) Perfekt Kohärenz

$$|\gamma_{12}| = 1$$

$$\begin{cases} I_{\max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} = 4I_0 \\ I_{\min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow V = \frac{4I_0 - 0}{4I_0 + 0} = 1$$

III) Partiell Kohärenz: $0 < |\gamma_{12}| < 1$

$$\begin{aligned} I &= I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \operatorname{Re}[\gamma_{12}(\tau)] = \\ &= 2I_0 (1 + \operatorname{Re}[\gamma_{12}(\tau)]) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} I_{\max} = 2I_0 (1 + |\gamma_{12}|) \\ I_{\min} = 2I_0 (1 - |\gamma_{12}|) \end{cases}$$

$$\Rightarrow V = \frac{2I_0 (1 + |\gamma_{12}| - 1 + |\gamma_{12}|)}{2I_0 (1 + |\gamma_{12}| + 1 - |\gamma_{12}|)} = \frac{2|\gamma_{12}|}{2} =$$

$$= |\gamma_{12}|$$