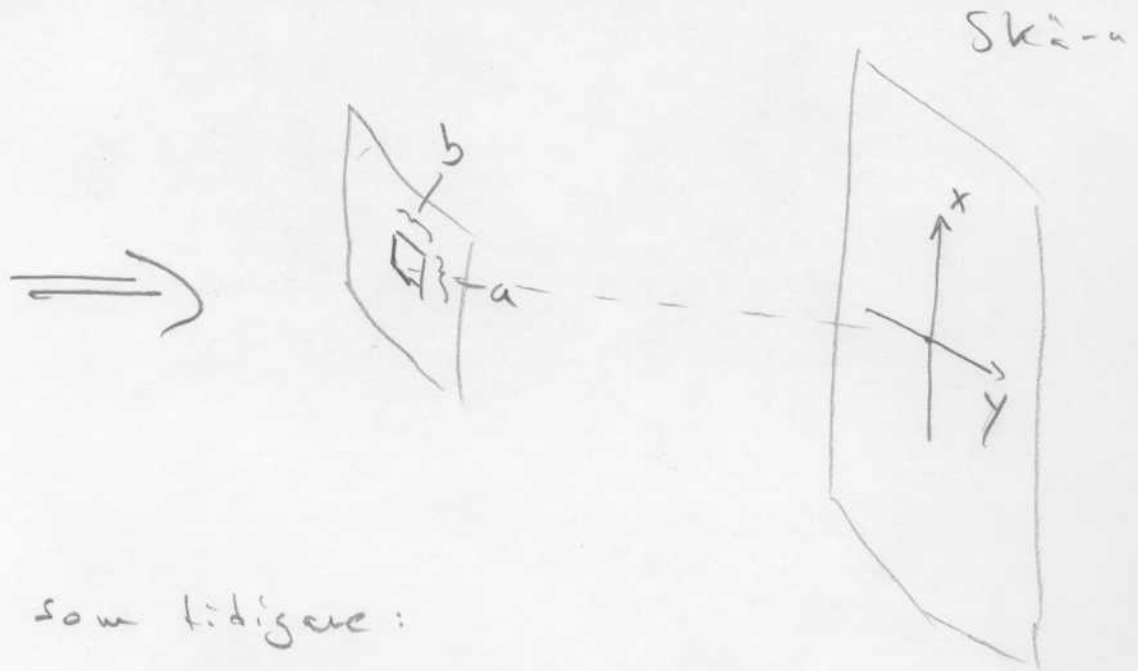


Rektangulära hål

TV2 små dimensioner $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ spridning (diffraction) i två dimensioner.



som tidigare:

$$I_y = I_0 \cdot \frac{\sin^2 \beta}{\beta^2}$$

där $\beta = \frac{1}{2} k b \sin \theta_y$
(θ_y är vinkeln i "y-led")

nu, dessutom:

$$I_x = I_0 \cdot \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2}$$

där $\alpha = \frac{1}{2} k a \sin \theta_x$
(θ_x är vinkeln i "x-led")

Minima uppstår då:

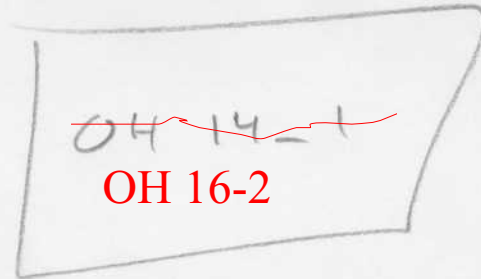
$$\begin{cases} b \sin \theta_y = m_y \lambda & , m_y = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \\ a \sin \theta_x = m_x \lambda & , m_x = \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases}$$

eller, vid små vinklar då:

$$\begin{cases} \frac{b y}{L} = m_y \lambda \\ \frac{a x}{L} = m_x \lambda \end{cases}$$

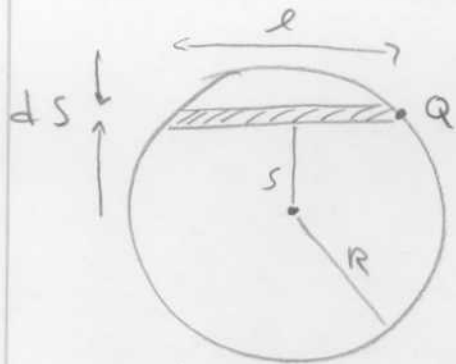
Totala intensiteten:

$$I(x, y) = I_0 \frac{\sin^2 \beta}{\beta^2} \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2}$$



Cirkulärt hål

Man måste integrera över hela ytan



Delar upp ytan i små "strimlor", belägna på avståndet s från mitten, och med bredd $l(s)$

Ekv. För cirkel: $x^2 + y^2 = R^2$

punkter Q: $\left(\frac{l}{2}\right)^2 + s^2 = R^2$

$$\Rightarrow l(s) = 2\sqrt{R^2 - s^2}$$

Arean av strimlan, $dA = l \cdot ds = 2\sqrt{R^2 - s^2} ds$

Om en strimla nu har fältamplitud $\frac{\epsilon_0 \cdot dA}{A}$

$\Rightarrow$ bidraget från en strimla:

$$dE_p = \frac{\epsilon_0 \cdot dA}{r_0 \cdot A} e^{i(k(r_0 + \Delta) - \omega t)}$$

där $\Delta(s) = s \sin \theta$

$$\Rightarrow E_p = \left\{ \frac{\epsilon_0}{r_0 \cdot A} \int_{-R}^R e^{iks \sin \theta} \cdot 2\sqrt{R^2 - s^2} ds \right\} e^{i(kr_0 - \omega t)}$$

$$E_{p0} = \frac{2\epsilon_0 R}{r_0 \cdot A} \int_{-R}^R e^{iks \sin \theta} \sqrt{1 - \left(\frac{s}{R}\right)^2} ds$$

substitution:

$$\textcircled{1} \quad \xi = \frac{s}{R} \Rightarrow ds = R d\xi, \quad \begin{cases} s = R \Rightarrow \xi = 1 \\ s = -R \Rightarrow \xi = -1 \end{cases}$$

$$E_{po} = \frac{2 \epsilon_0 R^2}{r_0 A} \int_{-1}^1 e^{i \xi k r \sin \theta} \sqrt{1 - \xi^2} d\xi$$

Subst:

$$(2) \quad \gamma = k r \sin \theta$$

$$E_{po} = \frac{2 \epsilon_0 R^2}{r_0 A} \int_{-1}^1 e^{i \xi \gamma} \sqrt{1 - \xi^2} d\xi$$

Standard integral! $\rightarrow$ Bessel Fnn.

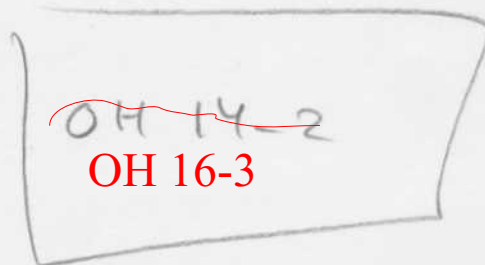
$$E_{po} = \frac{2 \epsilon_0 R^2}{r_0 A} \cdot \frac{\pi J_1(\gamma)}{\gamma}$$

$$J_1(\gamma) = \frac{\gamma}{2} - \frac{(\gamma/2)^3}{1^2 \cdot 2} + \frac{(\gamma/2)^5}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3} - \dots$$

(Första ordv. Bessel Fnn.)

$$\frac{J_1(\gamma)}{\gamma} \rightarrow \frac{1}{2} \quad \text{där} \quad \gamma \rightarrow 0$$

$$I = I_0 \left(\frac{2 J_1(\gamma)}{\gamma} \right)^2, \quad \text{där} \quad \gamma = k R \sin \theta$$



$$D \sin \theta = 1,22 \lambda$$

($D = 2R = \text{diameter}$)

~~OH 14-2~~

OH 16-3

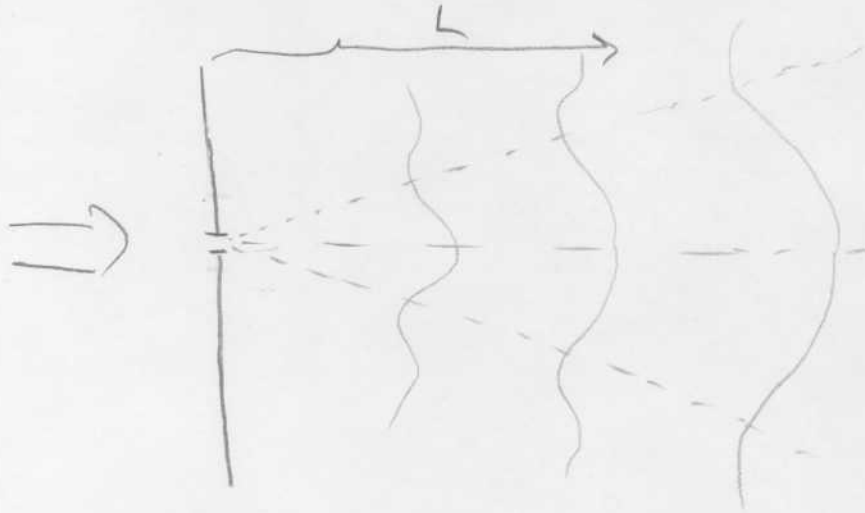
centralmax kallas "Airy skivran"

Vinkelvidden av denna: $\Delta \theta = \frac{1,22 \lambda}{D}$

Oändligt avstånd till skärmen?

Vinkelspridningen är oberoende av avståndet till skärmen.

$\Rightarrow$ Mönstret växer linjärt



$$\Delta\theta = \frac{1.22\lambda}{D} \quad (\text{för cirkulärt hål})$$

$$\Rightarrow \text{Radien av Airyskivan}, R_A = L \cdot \Delta\theta = \frac{1.22\lambda L}{D}$$

men, R_A måste vara större än $D/2$
(spridning)

$$\text{Alltså } R_A = D/2 \Rightarrow L_{\min}$$

$$\Rightarrow L_{\min} = \frac{D^2}{2.44\lambda}$$

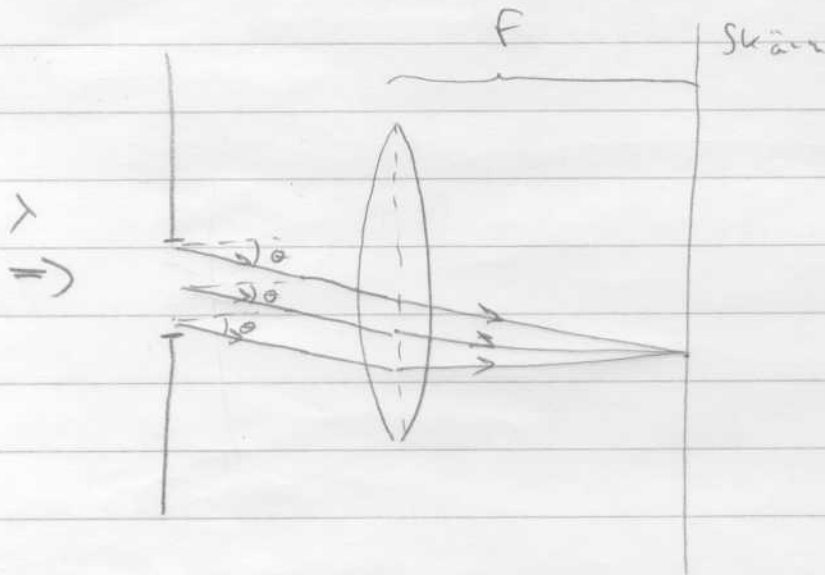
Villkor för Fraunhofer approx.

$$L \gg \frac{D^2}{\lambda} \quad \text{eller}$$

$$L \gg \frac{\text{Area av aperturen}}{\lambda}$$

Knep.

En lins avbilda parallella strålar vid fokallängd

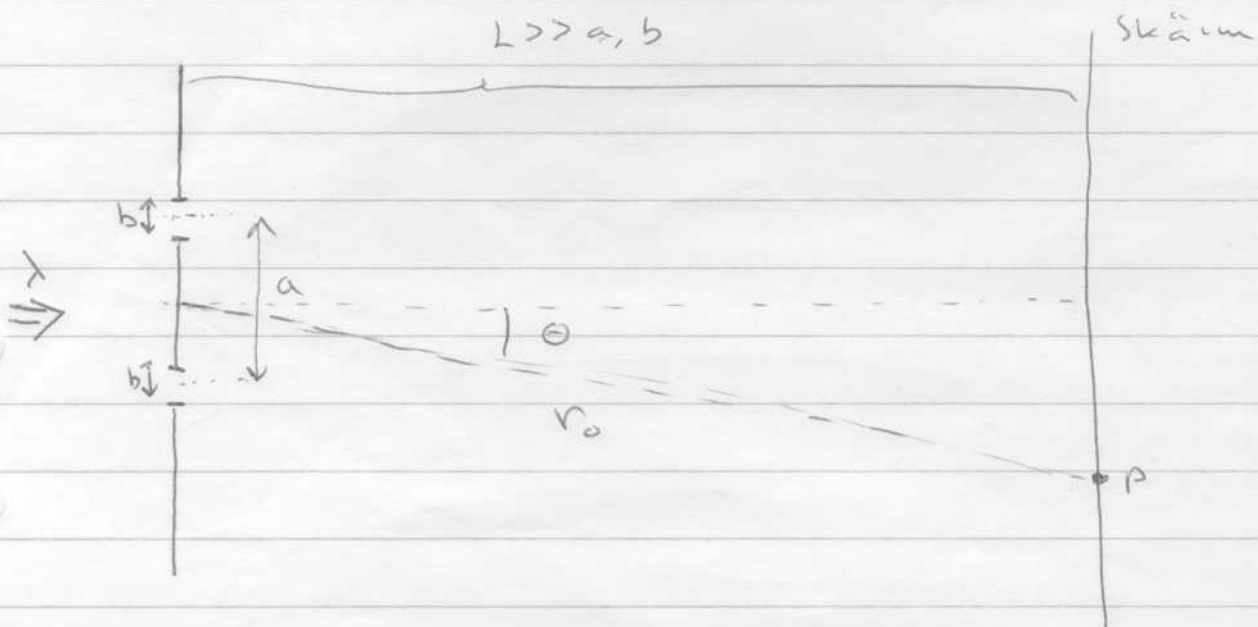


Det oändligt avlägsna föremålet avbildas
vid avståndet f . Avståndet mellan spalt
och lins är oväsentligt.

Dubbel spalt ~~(XXXX)~~

Diffraction + interferens

$L \gg a, b$



Amplituden vid P :

$$E_{Po} = \frac{E_0}{r_0 b} \int_{-a/2+b/2}^{a/2+b/2} e^{iks \cdot \sin \theta} ds + \frac{E_0}{r_0 b} \int_{a/2-b/2}^{a/2+b/2} e^{iks \cdot \sin \theta} ds =$$

$$= \frac{E_0}{r_0 b} \cdot \frac{1}{ik \cdot \sin \theta} \left(e^{i \frac{k}{2} (-a+b) \sin \theta} - e^{i \frac{k}{2} (-a-b) \sin \theta} + e^{i \frac{k}{2} (a+b) \sin \theta} - e^{i \frac{k}{2} (a-b) \sin \theta} \right)$$

$$L \gg 1 \quad \beta = \frac{kb}{2} \cdot \sin \theta$$

$$\alpha = \frac{ka}{2} \cdot \sin \theta$$

$$E_{po} = \frac{\epsilon_0}{r_0 b} \cdot \frac{b}{i \cdot 2\beta} \left\{ e^{i\alpha} (e^{i\beta} - e^{-i\beta}) + e^{-i\alpha} (e^{i\beta} - e^{-i\beta}) \right\} =$$

$$= \frac{2\epsilon_0}{r_0} \cdot \frac{\sin\beta}{\beta} \cdot \cos\alpha$$

$$I = \frac{1}{2} \epsilon_0 c \left(\frac{2\epsilon_0}{r_0} \right)^2 \cdot \frac{\sin^2\beta}{\beta^2} \cdot \cos^2\alpha$$

$$I = 4I_0 \frac{\sin^2\beta}{\beta^2} \cos^2\alpha$$

int. i dubbelspalt

Diff. i enkelspalt

Diffraction min dD : ~~$m\lambda = b \sin\theta$~~

$$b \cdot \sin\theta = m\lambda, \quad m = \pm 1, \pm 2, \pm 3$$

Interferens dD

$$a \cdot \sin\theta = m'\lambda, \quad m' = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

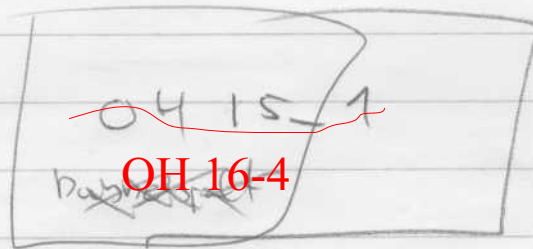
Exempel:

spaltavstånd = 5 · spaltbredd

$$\therefore a = 5b$$

$\Rightarrow$ 5:e int. max. sammanfalla med
1:a st. diff. min

$$\left(\begin{array}{l} a \cdot \sin \theta' = 5 \cdot \lambda = 5b \sin \theta' \\ b \cdot \sin \theta = 1 \cdot \lambda \end{array} \Rightarrow 5 \cdot \frac{\sin \theta'}{\sin \theta} = 5 \right. \\ \left. \Rightarrow \theta' = \theta \right)$$



Om man vill ha ngl. som ökar
Yungs dubbelgalt

$$: a \gg b$$

Fler spalter

N st. spalter, bredd: b , separation: a

Integrering öva alla spalter $\Rightarrow$

$\Rightarrow$

$$I = I_0 \cdot \frac{\sin^2 \beta}{\beta^2} \cdot \frac{\sin^2 N\alpha}{\sin^2 \alpha}$$

$$\text{där: } \beta = \frac{k b}{2} \cdot \sin \Theta$$

$$\alpha = \frac{k a}{2} \cdot \sin \Theta$$

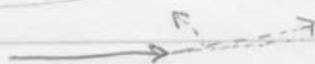
$$\text{Interferensfaktorn: } \frac{\sin^2 N\alpha}{\sin^2 \alpha} = IF$$

$N=1$ $\Rightarrow IF = 1$ $\therefore$ diff. i enkelspalt

$$\text{N=2: } IF = \left(\frac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha} \right)^2 = \left(\frac{2 \cos \alpha \sin \alpha}{\sin \alpha} \right)^2 = 4 \cdot \cos^2 \alpha$$

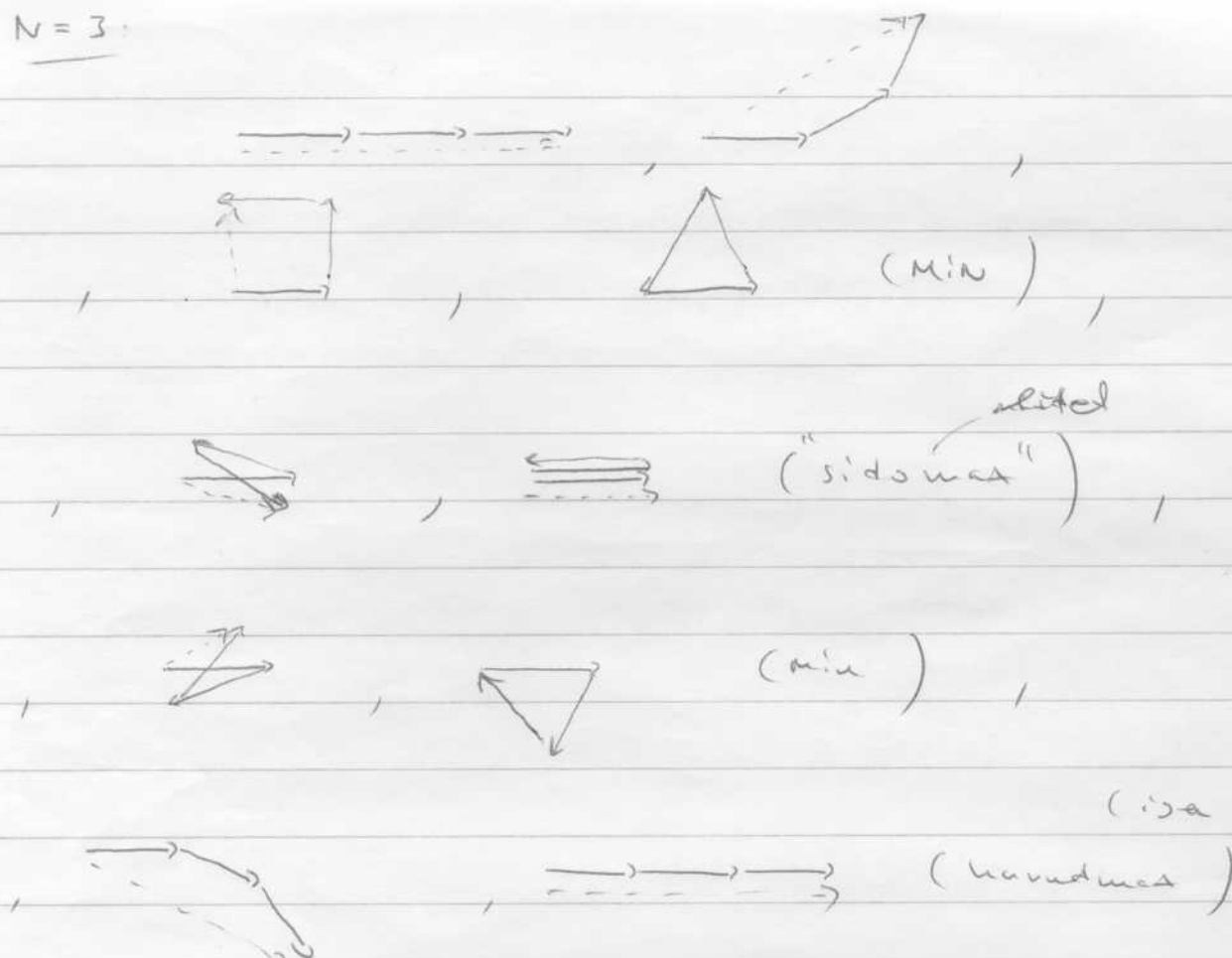
$\therefore$ diff. i dubbelspalt

Fasvektorer:



$\Rightarrow$ successiva met och min

$$N=3:$$



$$IF = \frac{\sin^2 3\alpha}{\sin^2 \alpha} = \left(\frac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha} \right)^2$$

~~Min~~

$$\alpha = 0 \Rightarrow IF = 3^2 = 9 \quad (\text{unavoidable})$$

$$\alpha = \pi \Rightarrow IF = (-3)^2 = 9 \quad (- \text{ " } -)$$

$$\alpha = 2\pi \Rightarrow IF = 9 \quad (- \text{ " } -)$$

$$\alpha = 3\pi \Rightarrow IF = 9 \quad (- \text{ " } -)$$

$$3\alpha = \pi \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{3} \Rightarrow IF = 0 \quad (\text{Min})$$

$$3\alpha = 2\pi \Leftrightarrow \alpha = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow IF = 0 \quad (- \text{ " } -)$$

$$3\alpha = 4\pi \Leftrightarrow \alpha = \frac{4\pi}{3} \Rightarrow IF = 0 \quad (\text{Min})$$

Int. max dG $\alpha = \frac{\pi}{3} \cdot m'$, ~~m'~~ $m' = 1, 2, 4, 5, 7, 8$

Int. principalmax dG $\alpha = \pi \cdot m$, $m = 0, 1, 2, \dots$

oder:

Int max dG: $a \sin \theta = \frac{m'}{3} \cdot \lambda$

Int max dG: $a \sin \theta = m \lambda$

OH, ~~15-2~~
OH 15-2

OH 16-5

Nst spiel-

Int. max dG $a \sin \theta = \frac{m'}{N} \cdot \lambda$, $m' = 1, 2, 3, \dots$
 $m' \neq N, 2N, 3N, \dots$

Int max dG $a \sin \theta = m \lambda$, $m = 0, 1, 2, \dots$

diff max dG $b \sin \theta = m'' \lambda$, $m'' = 1, 2, 3, \dots$

OH, ~~15-3~~
15-3

OH 16-6

OH, ~~15-4~~
15-4

OH 16-7