

• Våg $\approx$

$\approx$ En variation (eller förändring, eller svängning) som propagerar, utan att någon materia gör det.



Mekaniska vågor

- partikelrörelse
- Behöver ett medium

EM-vågor

- Svängande EM-fält
- propagera också i vakuum

T.ex.

våg på en sträng,
vågor på vatten,
ljus ...

T.ex.

Synligt ljus

Infrarött strålning

Ultraviolett — " —

Röntgen — " —

Gamma — " —

RF — " —

Mikrovågor

Two categories of waves:

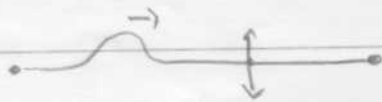
Transversella

och

Longitudinella

Förändringen sker
transversellt mot
utbredningen.

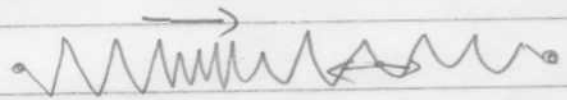
ex: Gitterström



ex: Ljus

Förändringen sker
i samma riktning
som utbredningen

ex: "slinky"-spring



ex: Ljud



MATEMATISK FORMULERING AV EN VÅG

Antag en "förändring" beskriven av en godtycklig fkn. $y = f(x)$



$f(x)$ är "vågprofilen vid $t=0$ "

Antag nu att vågen "propagerar", dvs vid ett senare tillfälle ser den ut som:



Med hänvisning till den ursprungliga fkn. kan situationen nu beskrivas med

$$y(t_1) = f(x - vt_1)$$

om v är vågens hastighet ("vågshastighet")

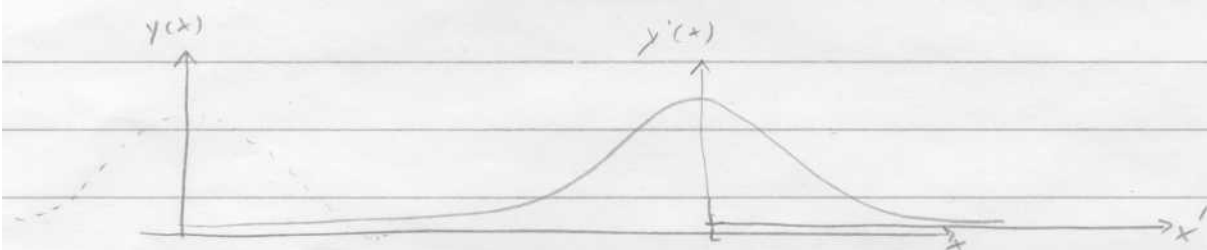
Denna form stämmer också för
 $t=0$, och för precis alla tider

$$\text{Alltså} \quad y(x,t) = f(x \mp vt)$$

där $\begin{cases} \text{minus} \Rightarrow \text{vdg längs pos. } x\text{-axeln} \\ \text{plus} \Rightarrow \text{--- " --- neg. ---} \end{cases}$

vi transformerar : $(x - vt) \rightarrow x'$

$$\Rightarrow y(x, t) = f(x - vt) \rightarrow y'(\cancel{x}) = f(x')$$



Med partiella derivata försöker vi ta fram
en allmän ekvation för alla vågor

$$x' = x - vt \Rightarrow \frac{\partial x'}{\partial x} = 1 \quad ; \quad \frac{\partial x'}{\partial t} = -v$$

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial x'} \cdot \frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial x'} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial y}{\partial x'} \right) = \frac{\partial}{\partial x'} \left(\frac{\partial y}{\partial x'} \right) \cdot \frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{\partial^2 y}{\partial x'^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial x'} \cdot \frac{\partial x'}{\partial t} = -v \frac{\partial y}{\partial x'} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(-v \frac{\partial y}{\partial x'} \right) = -v \frac{\partial}{\partial x'} \left(\frac{\partial y}{\partial x'} \right) \frac{\partial x'}{\partial t} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x'^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

"VÅGEKVATIONEN"

En våg ska:

- uppfylla vågekvationen
- Ha allmänna formen $f(x \pm vt)$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad \text{är}$$

den "odämpade vågekvationen."

Om det finns dämpning så
uppträder termen av formen:

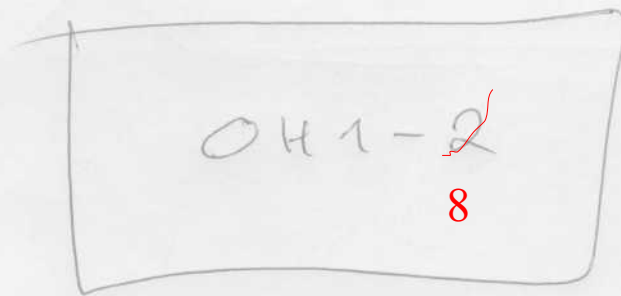
$$\frac{\partial \psi}{\partial t}$$

HARMONISK Våg

T.ex. $y(x,t) = A \cdot \sin \{k(x-vt) + \varphi_0\}$

Antag ett fixerat tidsögonblick, t.ex. $t=0$

$$\Rightarrow y(x,0) = A \cdot \sin \{kx + \varphi_0\}$$



A : Amplitud

$\{kx + \varphi_0\}$: spaciella fasen

φ_0 : initialfasen

λ : våglängden

$$\begin{cases} y(x) = y(x+\lambda) = A \cdot \sin \{k(x+\lambda) + \varphi_0\} \\ y(x) = A \cdot \sin \{kx + \varphi_0\} = A \cdot \sin \{kx + \varphi_0 + 2\pi\} \end{cases}$$

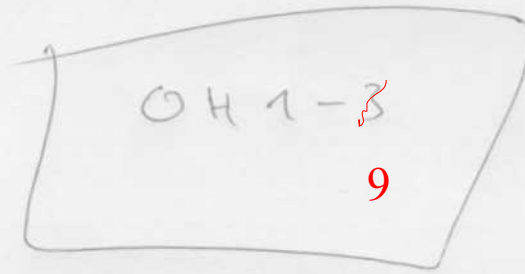
$$\Rightarrow k(x+\lambda) = kx + 2\pi$$

$$k\lambda = 2\pi$$

$$\Rightarrow k = \frac{2\pi}{\lambda} : \text{"vågsveklom" (i en dim.)}$$

Antag nu i stillet en fix punkt (f. ex. $x=0$)

$$\Rightarrow y(0,t) = A \cdot \sin \{ k_v t + \varphi_0 \}$$



A : Amplitud

$\{ k_v t + \varphi_0 \}$: temporal fase

φ_0 : initial fase

T : period tiden

$$\begin{cases} y(t) = y(t+T) = A \cdot \sin \{ k_v (t+T) + \varphi_0 \} \\ y(t) = A \cdot \sin \{ k_v t + \varphi_0 \} = A \cdot \sin \{ k_v t + \varphi_0 + 2\pi \} \end{cases}$$

$$\Rightarrow k_v T = 2\pi$$

$$T = \frac{2\pi}{k_v} \quad (1)$$

$\nu = \frac{1}{T}$: Frekvens [enhed: antal sv./s, Hz]

$\omega = 2\pi\nu$: vinkel frekvens [enhed: rad/s]

$$\textcircled{1} \Rightarrow \frac{1}{v} = \frac{\lambda}{v} \Rightarrow \lambda \cdot v = v$$

$$\textcircled{1} \Rightarrow \frac{2\pi}{k v} = \frac{1}{v} = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow v = \frac{\omega}{k}$$

Alltså : $v = \lambda \cdot v = \frac{\omega}{k}$

$$k \cdot v = \omega$$

$\Rightarrow$ vanligaste formen att skriva en harmonisk våg på :

$$y(x,t) = A \cdot \sin \{ kx - \omega t + \varphi_0 \}$$

~~Avsnitt 1-1~~

OH1-10

FAS

Antag en våg $y(x,t) = A \cdot \sin(kx - \omega t + \varphi_0)$

$$y(x,t) = A \cdot \sin \varphi$$

$\varphi = kx - \omega t + \varphi_0$ är "fasen"

$$\Delta \varphi = 2\pi \text{ svarar mot } \begin{cases} \Delta x = \lambda \\ \Delta t = T \end{cases}$$

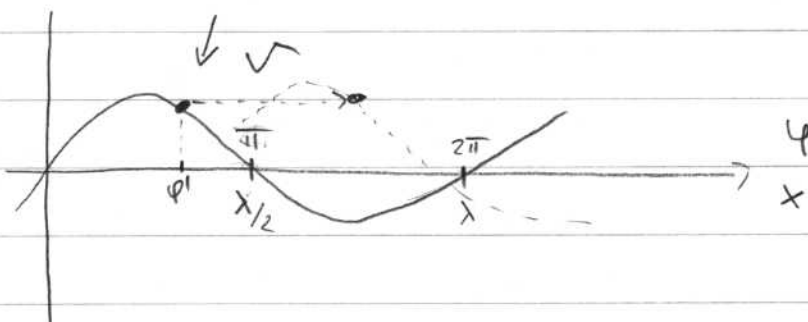
Hur snabbt ändras fasa med tiden?

$$\left| \frac{d\varphi}{dt} \right| = \omega = \text{vinkelhastighet}$$

Hur snabbt ändras fasa med stället?

$$\left| \frac{d\varphi}{dx} \right| = k$$

Hur snabbt flyttar sig en pkt som beskrivs av specifiell fas?
(antag att $\varphi_0 = 0$)



$$\text{"Faschastigkeit"} = \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)_{\text{const. } \varphi} = \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)_{\varphi}$$

Altman om partielles derivator:

$$\text{differentieren } d\varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_t dx + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_x dt$$

Multiplizieren mit $\left(\frac{1}{\partial t} \right)_{\varphi}$:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_{\varphi} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_t \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)_{\varphi} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_x \cdot 1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)_{\varphi} = - \frac{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_x}{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_t} = - \frac{-\omega}{k} = \frac{\omega}{k} = v$$

$$\text{Faschastigkeit} = v$$

$$\text{Om: } \Delta \text{llot} : \varphi = kx + \omega t + \varphi_0$$

$$\Rightarrow v = -\frac{\omega}{k}$$

Superpositionsprincipen

Antag två vågor: y_1 och y_2

$$\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} \quad \text{och} \quad \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2}$$

Addera dessa ekv!

$$\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \left(\frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2} \right)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (y_1 + y_2) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (y_1 + y_2)$$

$\Rightarrow (y_1 + y_2)$ uppfylla våg ekv.!

$\Rightarrow (y_1 + y_2)$ är en våg!

$\Rightarrow$ Vågor kan adderas

Sammanlagda vektorer av två vågor följer
genom att addera dem.

Vågor kan förstärkas varandra
eller motverka varandra

OH 1 - 11, 12