Termodynamik, föreläsning 4

Stora tal

kristall
Multipliciteten för en Einsteinmodell rep.

$$\Omega(N,q) = \binom{N+q-1}{q}$$

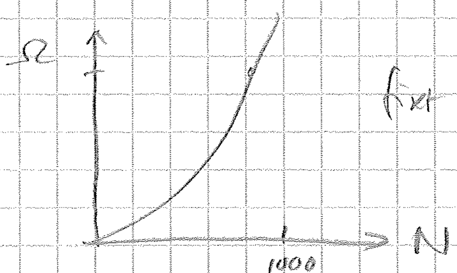
Ex: a) $N = 10$ (osc.) $q = 3$ (energi)

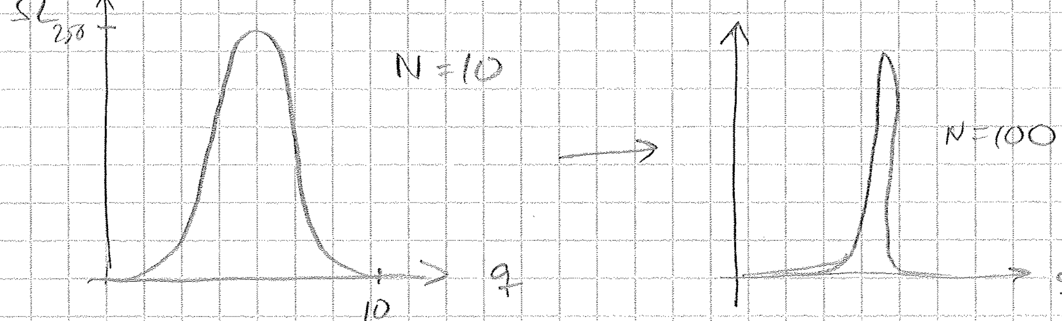
$$\Omega(10,3) = \binom{3+10-1}{3} = \binom{12}{3} = 220$$

b) $\Omega(100,10) = \binom{109}{10} \approx 4{,}3 \cdot 10^{13}$

c) $\Omega(1000,100) = \binom{1099}{100} \approx 1{,}3 \cdot 10^{144}$

$\Omega(N,q)$ växer alltså väldigt fort med N





Smalnar när N ökar.

(4-2) Finn approximation till $\Omega(N,q)$ för stora N.

$$\Omega(N,q) = \binom{N+q-1}{q} \approx \binom{N+q}{q} = \frac{(N+q)!}{q!\,N!}$$

Använd sedan Stirlings approximation

$$N! \approx N^N e^{-N}\sqrt{2\pi N} \quad \text{för} \quad N \gg 1$$

$$\ln N! \approx N \ln N - N - \tfrac{1}{2}\ln(2\pi N)$$

$$\approx N \ln N - N$$

Mer lätthanterligt att använda logaritmen:

$$\ln \Omega(N,q) \approx \ln(N+q)! - \ln q! - \ln N!$$

$$= (N+q)\ln(N+q) - \cancel{(N+q)} - q\ln q + \cancel{q} - N\ln N + \cancel{N}$$

$$= (N+q)\ln(N+q) - q\ln q - N\ln N$$

Antag nu $q \gg N$. Många energienheter per oscillator

$$(N+q)\ln(N+q) = (N+q)\ln\left(q\left(1+\frac{N}{q}\right)\right)$$

$$= (N+q)\left[\ln q + \ln\left(1+\frac{N}{q}\right)\right]$$

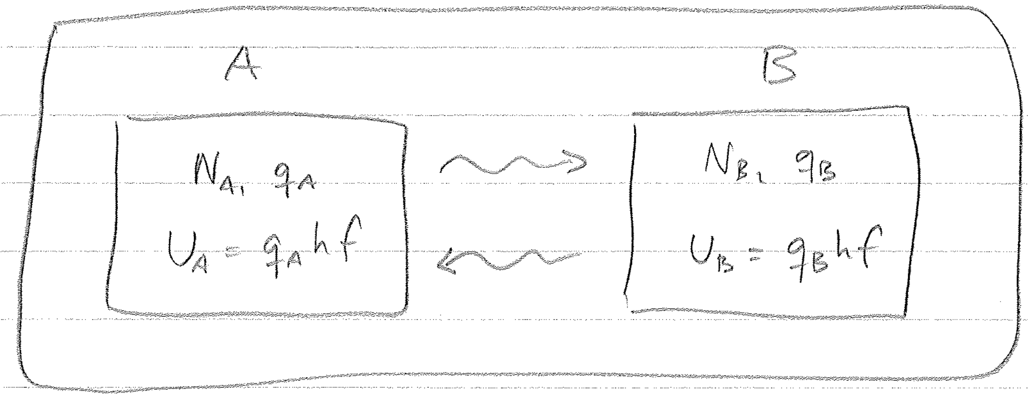
$$\left\{ \ln(1+x) \approx x \text{ om } x \ll 1 \text{ Taylorexp.} \right\}$$

$$= (N+q)\left[\ln q + \frac{N}{q}\right]$$

$$\therefore \ln \Omega = N \ln \frac{q}{N} + N + \cancel{\frac{N^2}{q}}$$

$$\Omega(N,q) = \left(\frac{q}{N}\right)^N e^N = \underline{\underline{\left(\frac{eq}{N}\right)^N}} \quad \text{om } q \gg N$$

Betrakta två <u>växelverkande</u> Einsteinkristaller



Totala energin $U_{tot} = U_A + U_B$

antal energikvanta $q_{tot} = q_A + q_B$

A och B kan utbyta energi så att q_A och q_B ändras, men q_{tot} konstant.

Använd sedan

<u>Det grundläggande antagandet inom statistisk mekanik:</u>
I ett isolerat system i termisk jämvikt är alla tillgängliga <u>mikrotillstånd</u> lika sannolika.

(Samma gäller inte för <u>makrotillstånd</u> - som vi ska se)

Vad är multipliciteten för q_A resp q_B enheter i A resp B ?

$$\Omega = \Omega(N_A, q_A) \cdot \Omega(N_B, q_B)$$ (Varför? -oberoende!)

$$\left(\approx \left(\frac{e q_A}{N_A}\right)^{N_A} \left(\frac{e q_B}{N_B}\right)^{N_B} \right)$$

4-4   Antag $N_A = N_B = N$

Beräkna multipliciteten för: alla energikvanta är i system B? dvs $q_B = q$, $q_A = 0$

$$\Omega = \binom{0+N}{0}\binom{q+N}{q} = 1 \cdot \frac{(q+N)!}{q!\,N!}$$

Jämför med lika fördelning $q_A = q_B = \frac{q}{2}$
Då är Ω som störst. (Fundera på varför.)

$$\Omega_{max} = \binom{q/2+N}{q/2} \cdot \binom{q/2+N}{q/2} = \left(\frac{(q/2+N)!}{(q/2)!\,N!}\right)^2$$

Jämför de två genom att ta kvoten

$$\frac{\Omega(\text{alla B})}{\Omega_{max}} = \frac{(q+N)!}{q!\,N!} \frac{((q/2)!\,N!)^2}{((q/2+N)!)^2} \approx$$

{funkar att sätta $q/2 \approx q$ här - se boken}

$$\approx \frac{q!\,N!}{(q+N)!} \approx \frac{1}{\sqrt{\Omega_{max}}} \ll 1$$

Ex. $N = 1000$ och $q = 2000$

$$\ln \Omega_{max} = 3000 \ln 3000 - 1000 \ln 1000 - 2000 \ln 2000$$
$$= 24019 - 6908 - 15202 = 1909$$
$$\sqrt{\Omega_{max}} = e^{1909/2}$$

Fördelningen $q_A = 0$, $q_B = q$ har alltså en otroligt låg multiplicitet jfr med jämn fördelning → det finns extremt få möjligheter att få det utfallet → detta makrotillstånd är extremt osannolikt.

Termodynamikens andra huvudsats: Ett system tenderar att vara i det makrotillstånd som har högst multiplicitet.

Beräkna multipliciteten för q_A enheter i A och q_B enheter i B. Vi ska ta fram en approx. (4-5)

$$\Omega = \Omega_A \Omega_B \approx \left(\frac{e q_A}{N}\right)^N \left(\frac{e q_B}{N}\right)^N = \left(\frac{e}{N}\right)^{2N} (q_A q_B)^N$$

oberoende fördeln.

Antag totala energin är $q\hbar\omega$

då måste $q_A + q_B = q$

Def. $q_A = \frac{q}{2} + x \quad q_B = \frac{q}{2} - x$

$$\Omega = \left(\frac{e}{N}\right)^{2N} \left(\left(\frac{q}{2}+x\right)\left(\frac{q}{2}-x\right)\right)^N$$

$$= \left(\frac{e}{N}\right)^{2N} \left(\left(\frac{q}{2}\right)^2 - x^2\right)^N$$

Tag logaritmen och antag $x \ll q/2$

$$\ln \Omega = 2N \ln\left(\frac{e}{N}\right) + N \ln\left[\left(\frac{q}{2}\right)^2 - x^2\right]$$

$$= 2N \ln\left(\frac{e}{N}\right) + N \ln\left[\left(\frac{q}{2}\right)^2 \left(1 - \left(\frac{2x}{q}\right)^2\right)\right]$$

$$= 2N \ln\left(\frac{e}{N}\right) + N \ln\left(\frac{q}{2}\right)^2 + N \ln\left(1 - \left(\frac{2x}{q}\right)^2\right)$$

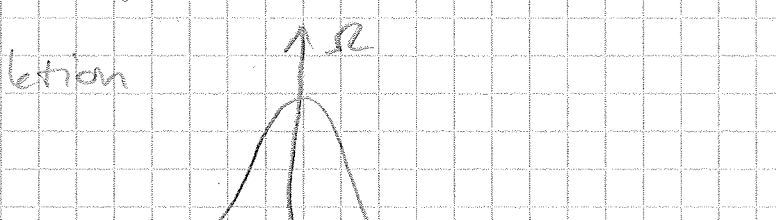
$$\approx N\left[2\ln\left(\frac{e}{N}\right) + \ln\left(\frac{q}{2}\right)^2 - N \cdot \left(\frac{2x}{q}\right)^2\right]$$

Då är

$$\Omega = \Omega_{max}\, e^{-N\left(\frac{2x}{q}\right)^2}$$

där $\Omega_{max} = \left(\frac{e}{N} \cdot \frac{q}{2}\right)^{2N}$

en Gaussfunktion



(4-6) Bredden på gausskurvan är den punkt x där funktionen fallit till e^{-1} av maxvärdet

$$e^{-N\left(\frac{2x}{q}\right)^2} = e^{-1}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{q}{2\sqrt{N}} \quad \ll q \;!$$

Fördelningen mycket smal!
faller av mycket snabbt från punkten $\frac{q}{2}$

$\Rightarrow$ Punkten $x=0 \Leftrightarrow$ jämn fördelning
är mest sannolik
och en märkbar avvikelse från denna
$x > q/2\sqrt{N}$ är mycket osannolik.

2:a huvudsatsen: $\approx$ I praktiken förekommer aldrig några märkbara avvikelser från lika fördelning.

$\{$ Prob 2.3(g) för N = 5, 10, 20, 50, 100

Prob 2.21.