New Physics: Sae Mulli (The Korean Physical Society), DOI: 10.3938/NPSM.60.943
Volume 60, Number 9, 2010년 9월, pp. 943~951

게임 이론의 수치적 연구

백승기
Integrated Science Laboratory, Department of Physics, Umeå University, 901 87 Umeå, Sweden

김범준
성균관대학교 물리학과, 수원 440-746

(2010년 9월 1일 받음, 2010년 9월 15일 게재 확정)

경제학이나 정치학과 같은 사회과학에서 게임이론은 거시적인 사회현상을 이해하는 강력한 도구로 자리잡았다. 최근 물리학, 특히 통계물리학 분야의 연구자들은 이러한 게임이론의 모형들을 이용하여 복잡계로서의 사회를 수치적으로 연구하는, 이른바 사회물리학 (sociophysics)이라는 신조어를 탄생시키면서 다양한 연구결과들을 생산해 내고 있다. 본 논문에서는 게임 이론의 연구에서 나타나는 조합론적 복잡성을 몇 가지 단순화된 가정과 수치 계산의 도움을 통해 분석한 최근 연구들을 소개한다. 먼저 죄수의 딜레마에서 각 참여자들의 기억력이 향상되었을 때 협력이 어떻게 발생하는가를 분석하여 '영리한 맞대응 (Intelligent Tit-for-tat)' 전략이 중요한 역할을 수행한다는 사실을 보인다. 다음으로 여러 사람이 동시에 자신의 행동을 조정해나가는 조정 게임의 경우, 모든 사람이 자신의 행동을 주어진 규범에 따라 조직하려고 할 경우 오히려 조정이 방해받는 상황이 있을 수 있음을 수치 계산을 통해 보인다. 마지막으로 소수자 게임의 한 변형인 역경매 게임에서의 균형점을 어떻게 수학적으로 공식화할지와 그 계산 방법을 논한다.

핵심어: 게임 이론, 사회물리학, 죄수의 딜레마 게임, 맞대응 전략, 보행자 문제, 역경매 게임, 균형점

Numerical Study of Game Theory

Seung Ki Baek
Integrated Science Laboratory, Department of Physics, Umeå University, 901 87 Umeå, Sweden

Beom Jun Kim*
Department of Physics, Sungkyunkwan University, Suwon 440-746

(Received 1 September, 2010 : accepted 15 September, 2010)

A game-theoretic approach has been providing a powerful tool in the qualitative understanding of macroscopic social phenomena in social sciences, *e.g.*, in economics and in political science. Recently, researchers in physics, especially in statistical physics, have also used these game-theoretic approaches, but in a more quantitative way, and have been producing a variety of interesting results in the new research area called 'sociophysics' by studying human society as a complex system. This work introduces recent works that have tackled the combinatorial complexities arising in game-theoretic studies with the aid of simplified assumptions and numerical computations. We first show how cooperation emerges in the prisoner's dilemma game when each player's memory capacity is enhanced and suggest that the intelligent tit-for-tat strategy plays a crucial role in the history of cooperation. Then, we numerically show that there is a certain case of simultaneous coordination among many players where the system has a high risk of failure when everyone is willing to follow the coordination, which is actually higher than when some are not concerned about it. Lastly, we discuss a mathematical treatment of an equilibrium solution for a reverse auction game, which is a variant of the minority game, and its computational approach.

PACS numbers: 89.75.-k, 87.23.Ge
Keywords: Game theory, Sociophysics, Prisoners dilemma game, Tit-for-tat strategy, Pedestrian problem, Reverse auction game, Equilibrium point

I. 서　론

최근 사회물리학 (sociophysics)이라는 신조어가 등장하면서, 물리학의 다양한 기법들을 활용하여 사회현상을 이해하려는 시도가 활발하게 이루어지고 있다 [1]. 이러한 연구, 즉 복잡계로서의 인간사회에 대한 통계물리학적인 연구의 일환으로서 재난상황에 처한 사람들의 거동 [2], 투표자 모형 [3], 주식시장을 기술하는 행위자 기반 모형 [4], 교통흐름 [5], 인간동역학 [6], 연결망구조위에서의 게임 [7]등이 활발히 연구되었다. 게임 이론은, 한 참여자가 얻는 댓가가 그 자신의 행위뿐만 아니라 다른 참여자들의 행위에 모두 연관되어 결정되는 상황에 대한 연구이다. 예를 들어 하나의 길을 서로 반대 방향으로 통행하고자 하는 두 명의 사람, 갑과 을이 있다고 하자. 둘이 우측통행이나 좌측통행 중 한 가지 규칙을 정함으로써 특별히 신경 쓸 일 없이도 충돌 없이 오가기를 원한다고 가정할 수 있다. 이 때 갑이 이 목적을 성취할지 여부는 갑 스스로의 선택만으로 결정되는 것이 아니라 을의 선택, 좀더 정확히 말해 을이 갑과 동일한 선택을 하는지 마는지에 의해 결정된다. 이것이 소위 말하는 조정 게임 (coordination game)의 상황이다. 그리고 우측통행을 할지 좌측통행을 할지처럼 주어진 상황들에서 어떻게 행동할지를 미리 생각해두는 것, 이것이 각 참여자의 전략(strategy)이라고 불리운다. 물론 참여자들은 보다 나은 댓가를 낳는 전략 쪽으로 마음을 바꿀 수도 있다. 하지만 아까와 마찬가지로 서로가 서로에게 의존하고 있는 상황이기 때문에 혼자 고민해서 자기 전략을 수정한다고 한들 다른 사람들도 마찬가지의 일을 하고 있기 때문에, 고민을 통해 돌아오는 댓가는 전혀 나아지지 않거나, 오히려 나빠질 수도 있다. 예컨대 위의 조정 게임에서 갑과 을이 처음에 조정에 실패하고 충돌 때문에 고민을 하다가 동시에 갑은 좌에서 우로, 을은 우에서 좌로 결정을 바꾼다면 상황은 나아질 리가 없다. 이런 요인들을 모두 고려해서 최선의 행동 방향을 찾아내는 일은 아주 간단해보이는 게임에서조차 수많은 경우의 수로 인해 상상을 초월할 정도로 복잡해지곤 한다. 우리는 그러한 몇 가지 게임에서 단순화된 가정과 수치 계산을 통해 몇 가지 새로운 결론을 도출해 내고자 한다. 본 논문에서는, 먼저 죄수의 딜레마게임에 참여자들의 기억력이 향상되었을 때 어떠한 전략이 성공적인지에 대한 연구 [8]를 소개하고, 다음으로 보행규칙을 따르는 사람들과 따르지 않는 사람들이 공존하는 경우의 보행자 흐름문제에 대해 다룬다 [9]. 마지막으로 소수자 게임의 한 변형인 역경매 게임에 대한 연구결과 [10]를 소개하고자 한다.

*E-mail: beomjun@skku.edu

II. 죄수의 딜레마

‘죄수의 딜레마’라는 이름은 이 게임이 두 명의 죄수를 따로따로 회유하는 상황으로 비유되면서 붙여졌다. 간단한 예를 들어보자. 함께 범죄를 저지른 갑과 을이라는 두사람이 있고, 만약 경찰의 조사를 통해 둘 모두 범죄를 저지른 것으로 결정된다면 각각 4년씩 징역형을 받는다고 하자. 또, 만약 갑과 을이 묵비권을 행사하여 아무런 이야기도 경찰에게 해주지 않는다면 별도의 결정적인 증거를 찾을 수 없는 경찰은 이둘에게 경미한 처벌만을 줄 수 있다고 하자. 심문하는 사람은 둘을 다른 방에 격리해놓고서 다음과 같은 제안을 던진다. “만일 다른 공범이 침묵을 지키는 동안 먼저 범행을 자백하면 당신은 아무 처벌 없이 풀려날 것이다. 하지만 당신이 침묵하는 동안 저 쪽이 자백한다면 당신은 4년형보다 더 무거운 처벌을 받게 된다.” 이러한 제안을 받은 갑은 을이 자백하면 자기는 4년형보다 무거운 처벌을 받게 되므로, 자신도 자백하는 것이 유리하게 된다. 반대로 을이 침묵을 지키는 상황에서도, 자신이 자백하는 것이 자신에게는 당연히 더 유리한 상황이 된다. 즉, 을이 자백을 하든 침묵을 지키든 갑의 입장에서는 자백하는 것이 유리하다는 것인데, 마찬가지로 을의 입장에서도 갑의 자백여하에 관계없이 자신이 자백하는 것이 스스

로에게 유리한 것이 된다. 따라서 각자는 스스로 현명하게 행동한다고 생각하여 둘다 자백하는 상황이 되는데, 이 경우는 둘 모두 침묵하는 상황보다는 무거운 처벌 (4년형)을 받게 된다. 즉, 심문자의 회유를 받아들이는 것은 각 개인에게 있어 합리적인 선택이지만, 서로 침묵을 지키고 풀려나온다는 더 나은 길을 외면한 것이기 때문에 종국에는 기묘한 일이 되는 것이다. 하지만 만일 이 죄수들이 같은 상황에 반복적으로 처하게 된다면 어떻게 될까. 앞서에서 배신을 당했던 사람은 다음 기회에서 먼저 배신을 함으로써 앙갚음을 할 수도 있고 아니면 계속 침묵을 고집함으로써 상대에게 어떤 신호를 보내려고 할 수도 있다. 즉 침묵(공범에 대한 협력, cooperation의 첫 글자인 C라고 칭한다)이냐 자백(공범에 대한 배신, defection의 첫 글자인 D로 칭한다)이냐가 전부가 아니라 '요 전 회에서 배신 당했으면 이렇게 하고 아니면 저렇게 하자'처럼, 훨씬 더 다양한 전략의 가능성이 열리게 되는 셈이다. 그리고 이 경우 "늘 배신한다"가 과연 장기적으로도 좋은 전략일지는 의심을 품어봄직하다. 실제로 무한히 반복되는 죄수의 딜레마에서는 협조하는 전략도 내쉬 균형점(Nash equilibrium, 어느 참여자도 굳이 전략을 수정할 이유가 없는 때를 의미함)을 이룰 수 있음이 알려져 있다. 모든 전략적 가능성을 고려한다는 것은 당연히 불가능한 일이다. 따라서 당장은 바로 직전의 게임 결과만을 가지고 이번 회의 행동을 결정하는 전략들을 먼저 고려해보도록 하겠다. 게임 결과란 (갑, 을)=$(C,C),(C,D),(D,C),(D,D)$의 네 가지를 말한다. 그리고 직전의 게임 결과가 결정되지 않았을 때, 즉 최초로 게임에 임할 때 어떤 선택을 할지까지 더해서 참여자는 총 5가지의 상황에 놓일 수 있다. 각각에 대해 C를 할지 D를 할지가 갈리므로 한 참여자가 가질 수 있는 전략의 갯수는 $2^5 = 32$이다. 위의 5가지 경우에 대해 갑이 취하는 행동을 상황의 함수인 b라고 한다면 갑의 전략은 다음처럼 적을 수 있을 것이다: $b_0|b(C,C),b(C,D),b(D,C),b(D,D)$. 여기서 맨 앞의 b_0 ($= C$ 또는 D)는 두 참여자가 처음 만나는 경우에 C를 택할지 D를 택할지를 결정하는 전략이다. 예컨대 갑이 언제나 C만을 하기로 마음 먹었다면 이 전략은 $C|CCCC$라고 할 수 있다. $C|CDDD$는 한 번이라도 배신이 발생하면 계속해서 앙갚음하는 '무자비 촉발(Grim Trigger, GT)' 전략이며 $C|CDCD$는 상대의 이전 행동을 따라하므로 '맞대응(Tit-for-tat, TFT)' 전략이다. 마지막 예로서 $C|CDDC$는 갑이 자신에게 유리한 결과를 얻었을 때에는 자신의 행동을 반복하고 ($b(C,C) = C, b(D,C) = D$), 불리한 결과를 얻었을 때에는 행동을 바꾼다는 의미에서 ($b(C,D) = D, b(D,D) = C$), 다소

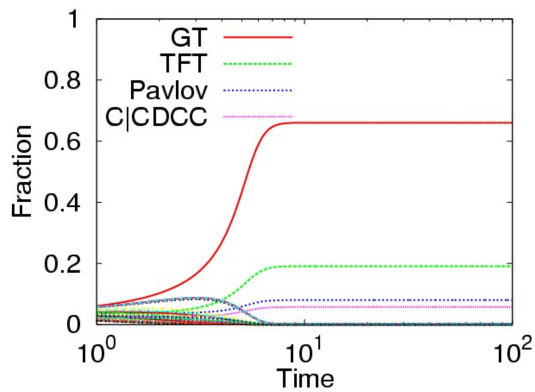

Fig. 1. Numerical integration results of Eq. (1).

난해한 명칭일 수 있지만 '파블로프의 개' 이야기를 따와 '파블로프(Pavlov)' 전략이라고 불린다. 우리는 분석을 좀더 간단명료하게 하기 위해 한 상황이 언제나 하나의 행동으로만 이어진다고 가정하고 확률적인 선택, 예컨대 90 %로 C를 하고 10 %로 D를 할 수 있다는 식의 전략은 고려하지 않겠다. 그리고 각 전략이 주는 댓가를 수치화하기 위해 갑은 상호 협력인 (C,C)에서 3점, 배신을 한 (C,D)에서 5점, 배신 당한 (D,C)에서 0점, 서로 배신한 (D,D)에서는 1점을 얻는다고 하겠다. 특정 전략 i를 택한 사람들의 비율을 p_i라고 해보자 ($i = 1,\cdots,32$). 사람들이 전략을 수정해가는 행동을 아주 간단화해서 기술하면, '한 전략은 그 댓가가 평균보다 낮으면 낮을수록 빨리 폐기되고 높으면 높을수록 더 빨리 선택된다'는 식이 될 것이다. 이것이 복제자 동역학(replicator dynamics, RD)이라고 불리우는 것으로 다음처럼 적을 수 있다.

$$\frac{dp_i}{dt} = (U_i - \langle U\rangle)p_i. \tag{1}$$

이 때 U_i란 물론 전략 i를 통해 얻어진 점수이고 $\langle U\rangle$는 전체 인구가 얻는 평균 점수($\sum_j U_j p_j$)를 의미한다. 위 32개 전략이 처음에 모두 같은 비율로 존재했다고 가정하고 RD를 적용하면 다음의 결과를 얻는다 (Fig. 1). 여기에서 가로축이 로그로 그려져 있음에 유의해야한다. 즉, 대부분의 전략이 굉장히 빠른 시간 안에 폐기되고 오직 4개의 전략, GT, TFT, Pavlov와 $C|CDCC$만이 살아남는다. 사실 이 네 개는 $C|CDXY$ 로 쓰고 XY의 4가지 가능성 ($X = C,D$와 $Y = C,D$) 을 넣으면 얻을 수 있는 전략들이기도 하다. 그리고 이 공유된 세 개 비트의 의미를 새겨보면, 그들이 먼저 배신하지 않고, 또 배신 당했을 때에는 즉시 보복할 줄 안다는 것이다. 이들은 다른 28개가 모두 소멸한 이후 서로 협조하면서 공존을 이루는데 이 때 XY에 존재하는 차이는 사실상 발현

되지 못한다. 이들 사이의 차이는 약간의 ‘실수’, 즉 상대가 행한 바를 거꾸로 기억하는 사건이 어쩌다 한번씩 일어날 수 있다고 할 때 비로소 드러난다. 예컨대 2차원 격자 위에 놓은 참여자들이 가까운 이웃들과 반복적으로 죄수의 딜레마 게임을 행한 다음 게임이 중단될 때마다 가장 많은 점수를 얻은 이웃의 전략을 따라간다고 해보자. 게임이 반복될 확률은 $1-q$로 놓는다 ($q \ll 1$). 아무런 실수가 없다면($e=0$) 그 결과는 RD에서 본 것과 흡사하게 많은 경우에 4개의 전략이 살아남는 것이다. 이것은 다소 운이 좋은 결과인데, 이처럼 낮은 차원의 동역학이 평균장만을 고려하는 식 (1)과 유사할 필요는 없기 때문이다. 만일 실수가 확률 $0 < e \ll 1$로 아주 약간씩 발생할 경우에는, 긴 시간을 두고 이들 네개 전략 사이에 경합과 교체가 일어나는 것을 볼 수 있다. 이 중 $C|CDCC$는 별로 큰 역할을 못하는 데 반해, GT, TFT와 Pavlov 사이에는 순환적 우위(cyclic dominance)가 존재해서 TFT는 GT를 밀어내고 Pavlov는 TFT를 밀어내고 다시 Pavlov는 GT에 의해 침범된다. 하지만 TFT가 충분히 우세해서 GT를 완전히 밀어낸다면 Pavlov가 결국 전부를 차지한 채 끝나게 된다. 어떤 의미에서 GT는 협력하는 전략 중에서도 실수를 용서치 않으므로 가장 무자비한 것이고 Pavlov는 (D,D)에서도 C로 갈 길을 열어 놓으므로 관대하다 할 수 있다. TFT는 자신들끼리 게임을 하다가 한 쪽에서 실수가 일어날 경우 화해를 해보려 하지만 엇박자로 (C,D)와 (D,C)만을 오가면서 실패한다는 의미에서 그 중간쯤이다. 하지만 TFT는 Pavlov라는 관대한 전략이 받아들여질 수 있도록 돕는 징검다리 역할을 한다.

바로 직전만 기억하는 전략들 대신, 두 단계 앞의 게임 결과까지 고려에 넣어서 행동을 결정하는 전략들을 비슷하게 따져봐도 협력하는 전략들이 살아남을지 의문을 품어볼 수 있다. 이 때에는 (CC,CC)부터 (DD,DD)까지 16가지 게임 결과가 있을 수 있고 게임 결과를 특정할 수 없는 최초의 상황에도 2개의 비트가 할당되기 때문에 총 $2^{18}=262,144$개의 전략이 가능하다. 아마 32개 중 28개가 빠르게 소멸한 앞서의 경우에서처럼 이 중 대부분은 긴 시간 지평에서 큰 역할을 하지 못하고 초기에 걸러질 것이다. 하지만 어쨌든 이는 상당히 큰 숫자이기 때문에 우리는 직접 RD를 돌리는 대신에 몇 가지 가정을 통해 좀더 간단한 길을 찾아보도록 하겠다. 그 가정들은 이렇다. 먼저 대부분의 전략이 걸러지는 잠깐 동안에는 임의의 시점에 존재하는 모든 전략들의 비율에 유의미한 차이가 없을 것이고 누가 누구를 만날지도 모두 엇비슷한 확률로 주어질 것이다. 또 각 전략들이 아주 소규모로만 존재하고 있기 때문에 그 중 최악의 결과를 주는 전략은 즉시 사라진다고 보아도 무방할 것이다. 그러면 우리는 식 (1)의 미분방정식을 적분하는 대신에, 최악의 점수를 주는 전략들을 지우고 그 전략들이 없어진 상태에서 다시 남은 전략들의 점수를 계산하는 일을 반복해도 된다. 첨언하자면, 이 작업은 앞서 32개 전략에 대해 시행했을 때 우리가 아는 대로 네개의 전략만을 남겨둔다. 실제 이 작업을 2^{18}개 전략들에 대해 행한 결과 95 %가 사라지고, 남은 것들은 먼저 배신하지 않는 것들뿐이다. 이것은 앞에서 직전 결과만을 기억하게 했을 때와 일치한다. 하지만 남은 5 %에는 Pavlov가 포함되지않는다. 그렇다면 실수 확률을 통해 관찰되는 긴 시간 척도에서의 동역학에서 선택되는 전략은 앞서와 사뭇 다를 수도 있는 것이다. 실제 남은 5%를 가지고 실수를 허용해서 격자 위에서 계산한 결과는 매우 흥미롭다. 우리는 자주 관찰되는 전략들을 크게 세 종류로 분류했는데 첫번째는 우리가 ‘효율적인 협력자(Efficient Cooperator, EC)’라고 부르는 무리로서, Pavlov처럼 이 전략을 쓰는 사람들끼리 실수가 일어났을 때 매우 적은 손실만을 끼친 채 원래의 협력 상황으로 돌아갈 수 있게끔 한다. 하지만 두번째 종류의 전략은 이 EC가 가진 관

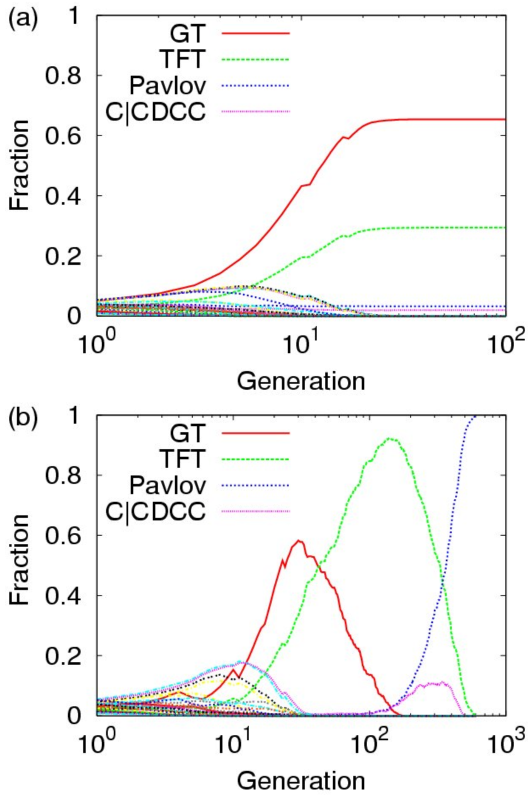

Fig. 2. Characteristic results of the iterated prisoner's dilemma game on the two-dimensional 128×128 square lattice with $q = 0.05$. The error probabilities are given as (a) $e = 0$ and (b) $e = 0.01$, respectively.

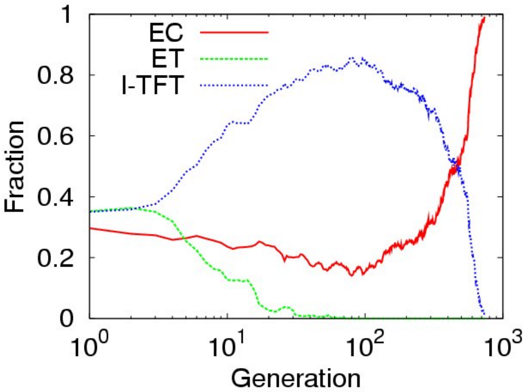

Fig. 3. Change of fractions of three representative strategies belonging to EC, ET, and I-TFT, respectively, when simulated on the 32 × 32 square lattice.

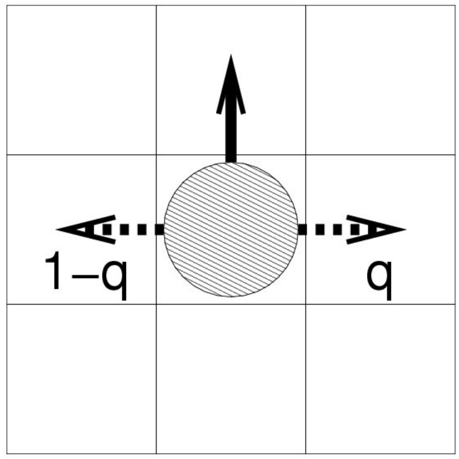

Fig. 4. Our model of a pedestrian.

대함을 반복적으로 이용해 이득을 취한다. 우리는 GT에 대응시키기 위해 다소의 어폐를 무릅쓰고 이들을 '효율적인 촉발(Efficient Trigger, ET)' 전략이라고 불렀다. 관대한 EC 전략이 실제 받아들여지기 위해서는 일종의 '맞대응'을 통해 이런 요소들을 청소하는 것이 필요하다. 즉 여기에서도 우리가 Intelligent Tit-for-tat(I-TFT)이라고 부르는 전략이 중요한 역할을 담당하는데, 이는 전략의 구조 면에서도 앞서 우리가 정의했던 TFT와 매우 유사하다. 즉 실수 확률이 낮다면 대부분의 시간 동안 이 전략은 두 단계 앞을 무시하고 사실상 TFT처럼 행동한다. 하지만 배신이 일어났을 경우 이 전략은 두 단계 앞까지 참조하면서 행보를 밟아나가고 만일 같은 I-TFT끼리 실수를 한 것이라면 무사히 협력으로 복귀한다. 이 과정은 EC보다는 약간 더 손실이 크지만 끝내 자력으로 실수를 고치지 못하는 TFT에 비하면 훨씬 진일보한 것이다. 그리고 이렇게 실수를 고쳐나가는 과정은 EC의 관대함처럼 계속해서 이용할 수 있는 성질의 것이 아니다. I-TFT 전략을 계속해서 속여보려는 상대는 잠시 후 결국에 TFT, 즉 철저한 맞대응을 마주하고 있는 자신을 발견하게 되고 결국 연속된 배신 시도는 응징 당한다. 이는 약간의 그래프 분석으로 보일 수 있는 것으로 여기에서는 자세한 논의를 생략하기로 한다. I-TFT가 EC를 어떻게 돕는지는 Fig. 3에 나타내었다.

III. 통행 규칙의 조정

앞서 서론에서 예를 들었던 통행규칙의 조정 문제를 식 (1)을 통해 분석해보자. 갑과 을의 충돌 여부만을 따진다면 좌(L)와 우(R) 사이에는 대칭이 존재하므로 갑과 을이 조정에 성공했을 경우, 즉 (L,L) 혹은 (R,R)에서는 갑과 을 모두 1점씩을 얻고 (R,L)이나 (L,R)로 실패한 경우에는 0점을 얻는다고 놓는다. 갑과 을이 p_R로 R을 행하고 $p_L = 1 - p_R$로 L을 행한다면 식 (1)은

$$\frac{dp_R}{dt} = p_R(1-p_R)(2p_R-1) \qquad (2)$$

이 되고 $p_R = 0, 1, 1/2$이라는 세 개의 균형점을 얻는다. 여기에 약간의 요동을 주어 해의 안정성을 분석해보면 마지막 해인 $p_R = p_L = 1/2$, 즉 무작위로 좌우를 선택하는 해는 불안정하다. 따라서 좌로든 우로든 약간의 쏠림만 도입된다면 그 방향으로의 통행 규칙이 들어설 것이라고 식 (1)은 예측한다. 이 예측이 일반적으로 옳은 것인지 체크하기 위해 다음처럼 길과 보행자를 모형화해보자. 보행자는 사각 격자 위의 한 상자씩을 차지할 수 있는데 한 상자에는 두 명 이상의 보행자가 들어갈 수 없다. 각자는 자신이 가고자 하는 고유의 방향이 있어서 그 방향으로 나아갈 수 있을 때에는 그리로 한 발 전진한다. 하지만 만일 그 방향이 다른 보행자에 의해 가로막혀있다면 다른 결정을 내린다. 첫째, 고유 방향을 바라보고 좌우가 모두 열려있을 때에는 q의 확률로 오른쪽, $1 - q$의 확률로는 왼쪽으로 회피 행동을 한다. 둘째, 좌우 중 한쪽만이 가로막혀있을 때에는 막혀있지 않은 방향을 택하고, 셋째로 좌우마저 봉쇄되어 있다면 그 자리에서 기다린다. 물론 이것은 굉장히 간단화된 모형일 것이나 약간 더 복잡한 행동(대각선 방향 전진이나 일보후퇴)을 도입한다고 해도 정성적인 부분은 크게 바뀌지 않는다.

좌우로 뻗어있는 길 위에 보행자들을 임의로 배치해보자. 이 때 길의 좌우 끝은 순환적 경계조건으로 이어진다. 그리고 보행자의 절반은 왼쪽을 고유방향으로 가지고 나머지 절반은 오른쪽을 고유방향으로 가진 채 나

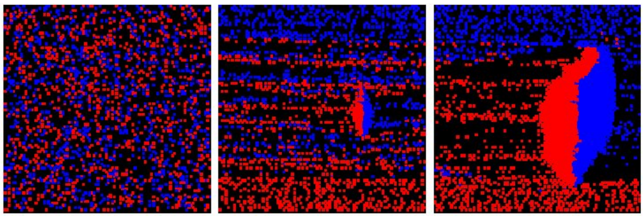

Fig. 5. Occurrence of jamming observed in the pedestrian model..

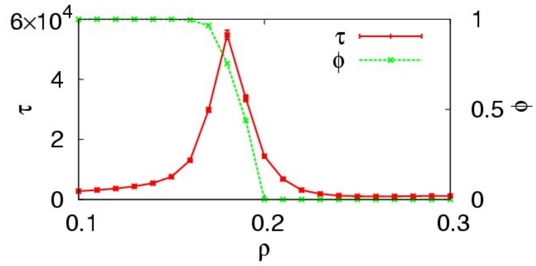

Fig. 6. Results from the numerical simulations where the size of the road is set to be $X \times Y = 50 \times 200$.

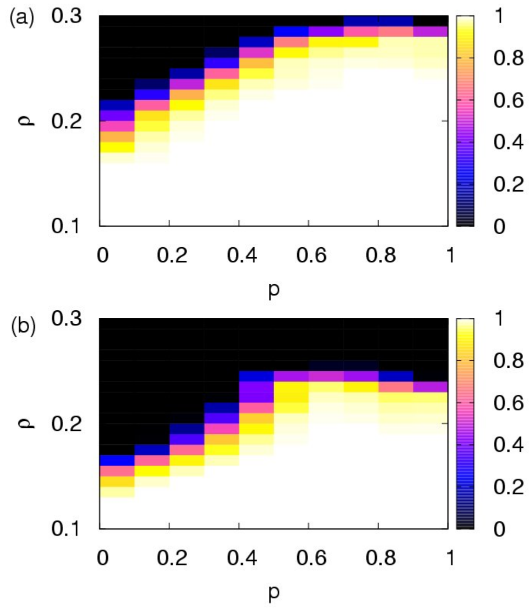

Fig. 7. Average flow as a function of the pedestrian density and the fraction of rule followers. The road sizes are (a) 50×200 and (b) 100×400, respectively.

아가려 한다. 그리고 각자의 고유방향을 바라보았을 때 모두가 우측통행의 규칙을 따른다고 해보자($q = 1$). 여러 명의 보행자를 모형 규칙에 따라 움직이려고 할 때 유의해야 할 사항은, 한 시간 간격 동안 어떤 순서로 보행자들을 움직여나갈 것인가이다. 모든 보행자들이 규칙을 만족하게끔 ‘동시에’ 업데이트하는 방식은 번거로우므로 한 시간 간격마다 임의로 보행자들의 순서를 정하고 그 순서대로 규칙을 적용해 움직여나가는 것이 쉽다. 그러나 이 경우 소위 데드록(dead-lock)이라는 상황이 일어날 수 있다. 이는 길의 한 차선이 모두가 한 방향으로 움직이려는 보행자들로 가득찼다고 했을 때조차 단지 순서상의 문제 때문에 아무도 전진하지 못하는 상황을 뜻하는데 약간의 재귀 알고리듬을 이용해 순서를 조정함으로써 이 현상을 방지할 수 있다. 이렇게 보행자들의 위치를 시간에 따라 업데이트해나가 보자. 모든 보행자들이 한번씩 고려되었을 때 시간 t는 1만큼 증가한다. 보행자의 밀도가 충분히 낮다면 이들은 아무 충돌 없이 자유로운 흐름(free flow)을 만들 것이고, 만일 충분히 높다면 이들은 정체(jamming)를 일으키면서 흐르지 못하게 될 것이다. 이것이 가장 기본적으로 존재하는 두 개의 정상상태(steady state)이다.

따라서 보행자 밀도ρ의 함수로 흐름의 양 ϕ를 생각해볼 수 있는데, 밀도란 길을 구성하는 사각형 상자들 중 얼마의 비율이 보행자로 점유되어 있는가이고 흐름의 양이란 보행자 중 얼마의 비율이 자신의 고유방향으로 전진하는 데 성공하는지를 뜻한다. Fig. 6은 특정 ρ를 넘어설 때 평균 ϕ가 1에서 0으로 급속하게 감소함을 보여주며, 이런 전이가 일어날 때 정상상태에 다다르는 시간 τ가 매우 길어짐을 가리킨다. 덧붙이자면 ϕ가 1과 0 사이의 값일 때에도 하나 하나의 샘플은 대개 자유 흐름 혹은 정체 상태 중 하나로 귀착되며 둘 사이의 비율만이 변한다.

만일 보행자들의 일부가 규칙을 개의치 않는다고 해보자. 즉 ρp는 q=1로서 규칙을 따르지만 나머지 $\rho(1-p)$는 q=1/2로서 특별한 좌우 선호가 없는 것이다. 그러면 두 변수 (ρ, p)의 함수로 흐름의 양 ϕ를 볼 수 있는데, 그 결과는 Fig. 7과 같다.

여기에서 밝을수록 흐름의 양이 많은 것이므로, 모두가 규칙을 준수하는 것($p = 1$)보다 약간의 비율이 규칙을 무시하는 경우가 오히려 더 많은 흐름을 가능케함을 알 수 있다. 그 이유는 $p = 1$에서 무작위의 배치부터 시작한 후 잠시 뒤의 순간을 보여주는 다음의 그림(Fig. 8)을 통해 알 수 있다. 길의 가운데에 보행자들끼리의 뭉침이 일어나고 있음이 보인다. 이는 양쪽으로 움직이는 보행자들이 서로의 오른쪽을 찾아가다 보니 길의 가운데부분의 보행자 밀도가 높아져서 혼잡이 일어나고 있음을 나타낸다. 그리고 이것이 정체로 발전할 수 있는 것이다. 만일 약간의 사람들이 규칙을 무시하고 움직인다면 그들이 이런 뭉침을 방해하고 흩어버리기 때문에 오히려 정체의 위험은 줄어든다.

우리가 강조하고자 하는 점은, 첫째로 규칙 무시를 통해 정체가 덜 일어난다는 이 역설적인 현상이 RD의 예측에서 벗어나는 반례라는 것이며, 둘째로 이는 무작위

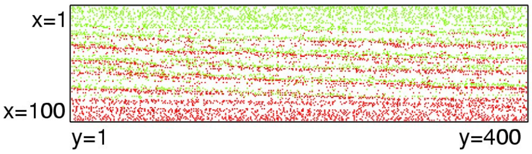

Fig. 8. Typical configuration at $t = 1000$ when started with $\rho = 0.2$ and $p = 1$ on a road of 100×400.

적인 초기 조건에서 안정을 찾아가는 과정에 관련된 것으로 과도적인 현상(transient phenomenon)을 관찰했을 때 일어난다는 것이다. 앞서 죄수의 딜레마 부분에서 이미 RD의 결과가 저차원에서 나타날 필요는 없다고 언급했는데, 지금의 경우에 이는 특히나 사실이다. 만일 훨씬 높은 차원에서라면 보행자들은 길 중간에서의 충돌을 쉽게 피하면서 제 자리를 찾아갈 것이고 지금의 역설적인 현상은 거의 사라질 것이다.

IV. 역경매 게임

우리가 다룰 또 하나의 게임은 일종의 소수자 게임이다. 소수자 게임은 다른 참여자와 다른 선택을 해야 이득을 얻는다는 점에서 조정게임과 반대이며 이런 의미에서 반조정(anti-coordination) 게임이기도 하다. 출근길의 지하철에서 기차의 앞부분에 타고 있는 것이 역 출구에 가깝다고 한다면 아마 앞부분에 먼저 타고 있는 것이 좀더 유리할 것이다. 그러나 모두가 같은 생각으로 제일 앞 칸에 탄다면 너무 비좁아서 아마 그 불편이 약간의 편리를 상쇄하고도 남을 것이다. 그렇다면 아마 두번째 칸에 올라타는 것이 좀더 나은 선택일 수도 있겠다. 이런 상황을 더 단순화해서 n명의 사람이 1과 n 사이의 자연수를 고른다고 해보자. 이 게임에서 점수를 얻으려면 가장 낮은 숫자를 골라야하지만 그 숫자는 자신만이 고른 것이어야 한다. 즉 1을 두 사람 이상이 뽑고 2를 한 명이 골랐으면 승자는 2를 고른 사람이 되어 1점을 얻는 식이다. 우리는 전략의 개념을 숫자 1과 n 사이에 걸친 확률분포라고, 즉 특정 숫자 i를 고를 확률 p_i의 집합이라고 한정지어 생각할 것이다. 물론 $\sum p_i = 1$이 만족된다. 그렇다면 이 게임에 임하는 소위 '좋은' 전략은 무엇일까? 우리가 택할 수 있는 개념 중 하나는 진화적으로 안정한 전략(evolutionarily stable strategy)인데, 이는 대다수가 이 전략을 택하고 있을 때 여기에서 벗어나는 것이 불리해지게끔 하는 것이다. 이보다 조금 더 약한 개념은 중립적으로 안정한 전략(neutrally stable strategy)인데, 이는 다수가 이 전략을 취하고 있을 때 여기서 벗어난들, 반드시 손해까지 보지는 않더라도 이익 볼 게 없다는 뜻이다. $n = 3$이 가장 간단한 경우이므로 이를 먼저 생각해보자. 갑과 을이 특정 전략 $\{p_i\}$를 취하고 있을 때 세번째 사람인 병이 여기에서 벗어날 이유가 없게끔 하려면 어떻게 해야 할까? 갑과 을이 만들어낼 수 있는 상황은 총 9가지이며 각각에 대해 병은 $\{\pi_i\}$의 전략을 가지고 자신의 이득을 계산해낸다. 먼저 (갑이 고른 숫자, 을이 고른 숫자)=(1,1)인 경우, 이렇게 될 확률은 p_1^2이다. 그렇다면 병은 숫자 2나 3을 고름으로써 우승할 수 있고 따라서 얻을 수 있는 점수의 기대치는 이기게 될때 받는 점수가 1점이므로, $\pi_2 + \pi_3$이다. 이렇게 9가지 경우를 모두 생각해보면 병이 기대할 수 있는 점수를 계산할 수 있다. 이것이 π_i에 무관해지게끔 p_i를 조합하면 병은 자신의 전략을 통해 상황의 개선을 기대할 수 없게 되고 이것이 우리가 원하는 답이다. 문제가 되는 것은 n이 3보다 약간만 많아져도 가능한 조합의 수가 굉장히 빠른 속도로 늘어나기 때문에 이를 올바로 셈하기가 쉽지 않다는 사실이다. 우리의 아이디어는 다항식의 전개와 대수적 연산을 통해 경우의 수를 정확히 셈하는 것이다. 즉 위의 $n = 3$ 예에서 $Z_0 = (p_1 + p_2 + p_3)^2$를 전개해서 얻어지는 9개의 항은 갑과 을이 만들어낼 수 있는 9개 경우의 수를 정확히 가리키고 있다. 이 중 숫자 1을 한 명만이 선택한 경우는 무엇일까? 이는 위 9개 항 중 p_1의 차수가 1인 것들로 나타날 것이다. 이를 대수적으로 얻어내는 일은 쉽다. 즉 Z_0를 p_1으로 미분한 후 p_1에 0을 대입하면 그런 항만이 나타날 것이다. 거꾸로, 이를 제외한 나머지 항들은 숫자 1이 우승 숫자가 아닌 경우들이다.

$$Z_1 = Z_0 - p_1[dZ_0/dp_1](p_1 = 0) \tag{3}$$

마찬가지의 논리로, 2 역시 우승 숫자에서 배제하려면 비슷한 연산을 Z_1에 행하면 된다.

$$Z_2 = Z_1 - p_2[dZ_1/dp_2](p_2 = 0) \tag{4}$$

한 발 더 나아가, 숫자 $i-1$까지를 우승 숫자에서 배제하고 i를 고른 사람이 아무도 없게 하려면 Z_{i-1}에 $p_i = 0$을 대입하면 된다.

$$c_i = [Z_{i-1}](p_i = 0) \tag{5}$$

그러면 병이 얻는 점수는 다음처럼 계산된다.

$$W = \sum c_i \pi_i \tag{6}$$

여기에서도 역시 $\sum \pi_i = 1$이므로 c_i가 i에 상관없이 모두 상수로 주어진다고 하면 $\{\pi_i\}$는 W의 계산에 아무 영향을 미치지 못한다. c_i가 모두 상수라는 것은 $n-1$개의

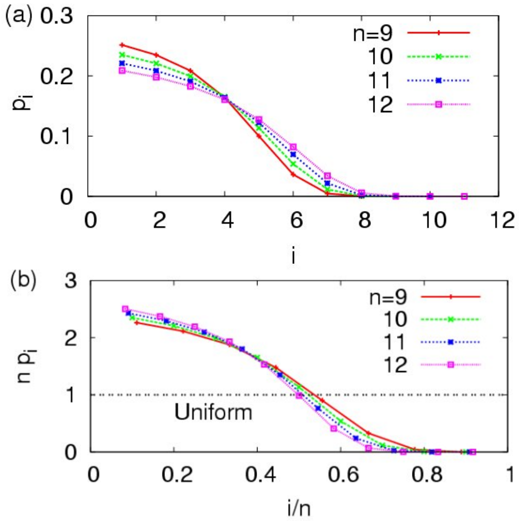

Fig. 9. Equilibrium solutions of the reverse auction game. Both panels (a) and (b) depict the same data but panel (b) scales both axes in terms of n to compare the outcomes with the uniform solution.

미지수를 가지는 $n-1$개의 방정식들이기 때문에 원칙적으로 풀 수 있고 이로부터 균형을 이루는 점인 $\{p_i\}$가 결정된다. 자세한 사항은 생략하겠지만 그렇게 얻어진 해를 Fig 9에 나타내었다.

한 가지 흥미로운 사실은, 만일 모두가 같은 전략을 사용한다면 ($p_i = \pi_i$) 이득을 최대화하는 해는 균일해, 즉 $p_i = 1/n$이라는 점이다. 반면 모든 유한한 n에 대해 균형해는 균일할 수 없다는 것을 쉽게 보일 수 있다. 여기에서도 일종의 딜레마, 즉 가장 좋은 해법이 있는데도 개개인이 자신의 이윤을 추구하다보면 오히려 그보다 낮은 점수들을 가지게 된다는 역설적인 상황이 나타나는 것이다. 이는 앞서 우리가 죄수의 딜레마에서도 기술하고자 했던 상황인데 그 때 두 명 사이에서만 게임이 고려되었던 것과 달리 지금 이 딜레마는 n명의 사람들 사이에서 일어나고 있다. 위의 대수적 방법을 가지고도 실제로는 다항식의 항이 엄청난 속도로 늘어나기 때문에 현재로서 방정식을 풀 수 있는 것은 $n = 12$ 남짓에 불과하다. 근사적인 계산을 통해 약간 더 높은 숫자에 대해서도 해를 예상할 수 있지만 이는 좁은 지면에서 설명하기에 적합치 않다. 다만 단순히 서로 성공적인 전략을 복제하게 함으로써 위의 분석적인 답에 수치적으로 근접할 수 있음을 밝혀두고자 한다.

우리가 얻은 답은 n명 중 한 명이 나머지를 바라보고 자신의 행동을 바꿀지 말지를 결정하는 상황을 염두에 두고 계산된 것이다. 물론 이것은 굉장히 부서지기 쉬운 지점일 수도 있다. 말하자면 마지막 사람은 어떤 π_i를 써도 동일한 댓가를 받기 때문에 굳이 p_i라는 전략을 정확히 따를 필요도 없다. 그런데 이 사람이 일단 p_i에서 벗어난다면 나머지 $n-1$명 중 하나가 보았을 때에는 대칭이 깨진 상황이 되고 이는 위의 해 전체를 의문스럽게 만들 수 있는 것이다. 우리가 수치적으로 행한 결과가 암시하는 바는, 그럼에도 불구하고 적절한 동역학을 가정하기만 한다면 전체적인 해는 분석적인 결과에서 아주 크게 벗어나지 않은 채 머무른다는 사실이다.

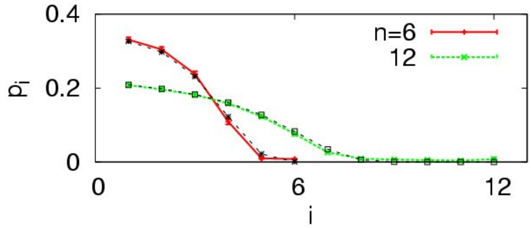

Fig. 10. Numerical results when players imitate successful strategies. The black dotted lines show the analytically obtained equilibrium solutions.

V. 결 론

본 논문에서는 게임 이론의 수치적인 응용의 예로서 죄수의 딜레마 게임, 보행자의 통행, 그리고 역경매 게임에 대해 소개하였다. 소개된 주제 이외에도 투표자 게임, 포식자-피식자 게임, 전염병의 확산 문제, 도로위에서의 교통 흐름에 대한 문제, 경제물리의 다양한 행위자 모형 등, 다양한 주제의 게임이론 관련 연구들이 활발하게 이루어 지고 있다. 이러한 최근의 연구 경향, 즉, 사회현상을 기술하는 게임이론의 모형을 정립하고 이를 통계물리학의 테두리에서 이해하고자 하는 시도는 지금까지의 짧지만 성공적인 적용예들을 볼때 앞으로도 점점 더 물리학에서 차지하는 비중이 커져갈것으로 기대된다.

참 고 문 헌

[1] C. Castellano, S. Fortunato and V. Loreto, Rev. Mod. Phys. **81**, 591 (2009).

[2] D. Helbing, I. Farkas and T. Vicsek, Nature **407**, 487 (2000).

[3] F. Vazquez and V. M. Eguiluz, New J. Phys. **10**, 063011 (2008).

[4] V.M. Eguiluz and M. G Zimmermann, Phys. Rev. Lett. **85**, 5659 (2000).

[5] D. Helbing, Rev. Mod. Phys. **73**, 1067 (2001).

[6] A.-L. Barabasi, Nature **435**, 207 (2005); C. Song, Z. Qu, N. Blumm and A.-L. Barabasi, Science **327**, 1018 (2009).
[7] G. Szabo and G. Fath, Phys. Rep. **446**, 97 (2007).
[8] S.K. Baek and B.J. Kim, Phys. Rev. E **78**, 011125 (2008).
[9] S.K. Baek, P. Minnhagen, S. Bernhardsson, K. Choi and B. J. Kim, Phys. Rev. E **80**, 016111 (2009).
[10] S.K. Baek and S. Bernhardsson, Fluctuation Noise Lett. **9**, 61 (2010).