En modell för priset på en aktie

Projektarbete i kursen

Vardagslivets mysterier förklarade 2006

Andreas Brodin

Abstract. Att kunna förutsäga hur priset på en aktie ändras med tiden skulle vara stort. En modell som används av olika finansiella institut och som beskrivs i denna text bygger på så kallad Brownsk rörelse. Modellen leder till lösningskurvor som har likheter med äkta matematiska fraktaler.

1. Matematiska förberedelser

För den som önskar veta mer om hur man beräknar kurvors lutning finns det otaliga böcker skrivna i ämnet matematisk analys. En introduktion som används på de inledande analyskurserna vid bland annat Umeå och Linköpings universitet är Adams [Ada06].

Lutning. Kurvan $y = f(x)$ i bild 1 har jämna former. En så kallad sekantlinje till kurvan går genom punkterna $(a, f(a))$ och $(b, f(b))$. Tänk

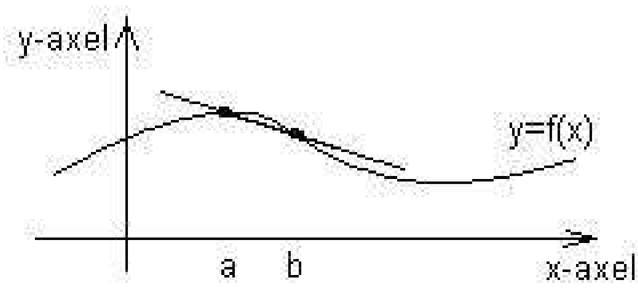


bild 1

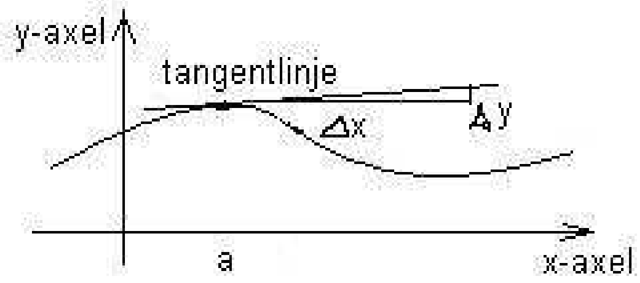


bild 2

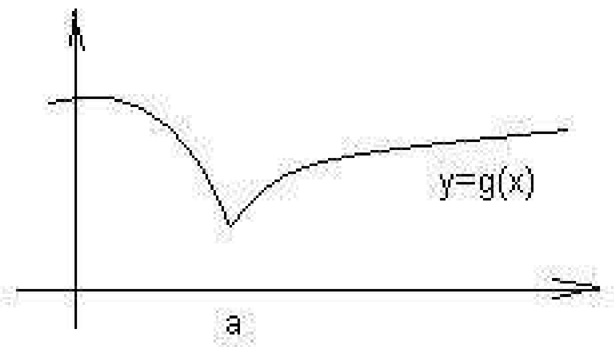


bild 3

er att b flyttas närmare a. När b uppgår i a blir sekantlinjen en tangentlinje till kurvan i punkten $(a, f(a))$.

Denna tangentlinjes lutning $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ definierar kurvans lutning i punkten $(a, f(a))$.I bild 3 är en funktion ritad som har en kant där $x = a$.

Låt b vara större än a, $b > a$, och studera igen en sekantlinje genom punkterna $(a, f(a))$ och $(b, f(b))$. Om b flyttas närmare a bildas en resulterande linje med lutning som är större än 0. Se bild 4.

Om b däremot hela tiden är mindre än a, $b < a$, och b flyttas närmare a genereras en linje med lutning mindre än 0. Se bild 5.

I detta fall säger man att kurvan inte har någon lutning i punkten $(a, g(a))$.

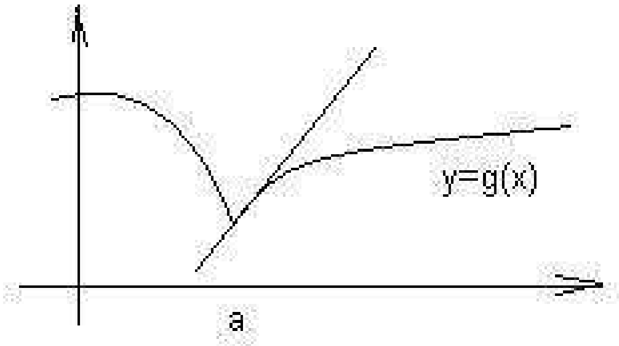


bild 4

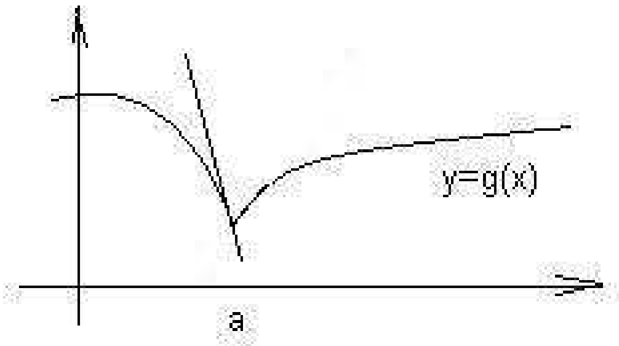


bild 5

En kurva utan lutning i någon punkt. En svensk matematiker, Helge von Koch (1870-1924) [Koc06], konstruerade en kurva utan lutning någonstans på kurvan. Se figur 6.

Sätter man ihop tre stycken sådana av Koch konstruerade kurvdelar som sidorna i en liksidig triangel så bildas något som liknar en snöflinga och denna kurva är känd som von Kochs snöflinga. På sidan 5 ses en sådan ritad med ett så kallat itererande funktionssystem.

Kurvan har också andra speciella egenskaper. En är att delar i den är själv-likformiga. Ett mindre avsnitt av kurvan har samma egenskaper

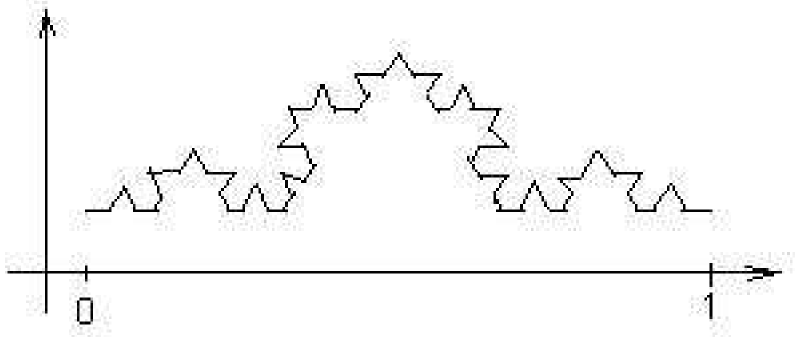


bild 6

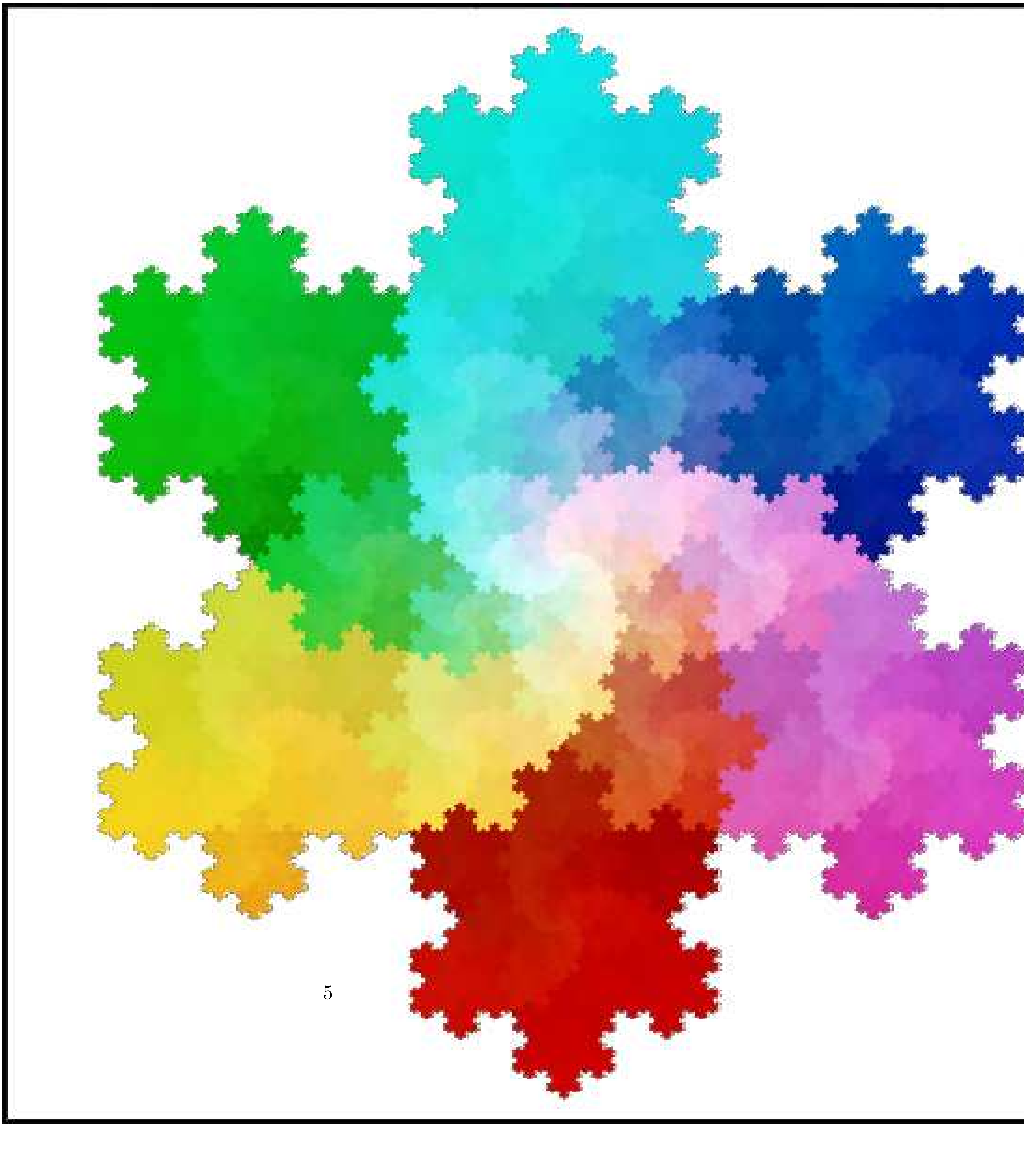
som den stora kurvan. Förstoras till exempel kurvan på intervallet mellan 0 och $\frac{1}{3}$, tre gånger så blir resultatet hela kurvan i bild 6.

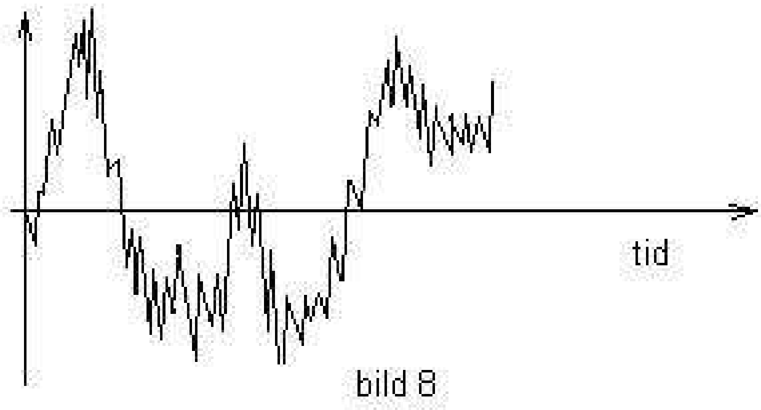
Andra kurvor med speciella och makabra egenskaper, så kallade matematiska monster, har konstruerats som exempel eller snarare motexempel till vad man tycker borde vara normalt. Många insåg tidigt att dessa monster även återfinns i naturen i olika former men utvecklingen och användandet av dessa tog fart först med B. Mandelbrots bok ”The fractal form of nature” [Man82] för 30 år sedan.

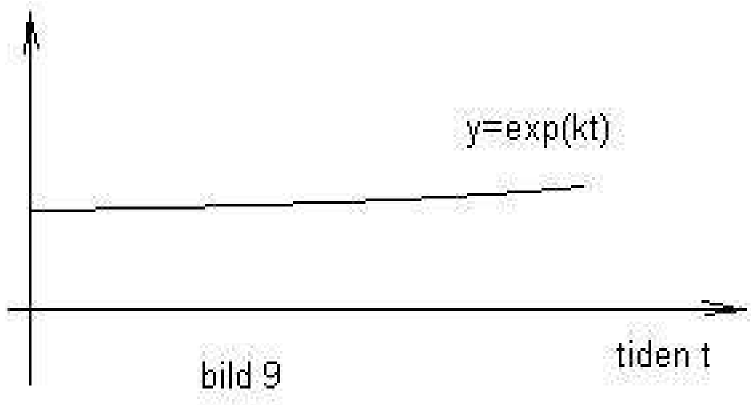
2. En modell för priset på en aktie

Historisk bakgrund till modellen. R. Brown [Bro28] studerade under åren 1826 och 1827 pollenpartiklar i vatten. Bland annat kom han fram till att spåret som en partikel färdas på är irreguljär och inte i någon punkt på banan har spåret en lutning.

År 1900 försökte L. Bachelier [Bac64] beskriva en aktiekurs matematiskt med resultat som liknade Browns partiklars rörelse. A. Einstein [Ein05] utvidgade Bacheliers idéer 1905 men det var inte förrän 1920 som N. Wiener [Wie23] visade att under vissa förutsättningar, en så kallad slumpvandring, så blir verkligen rörelsen den som Brown, Bachelier och Einstein studerat. Ett möjligt spår från en så kallad Wienerprocess med start i origo syns i bild 8.



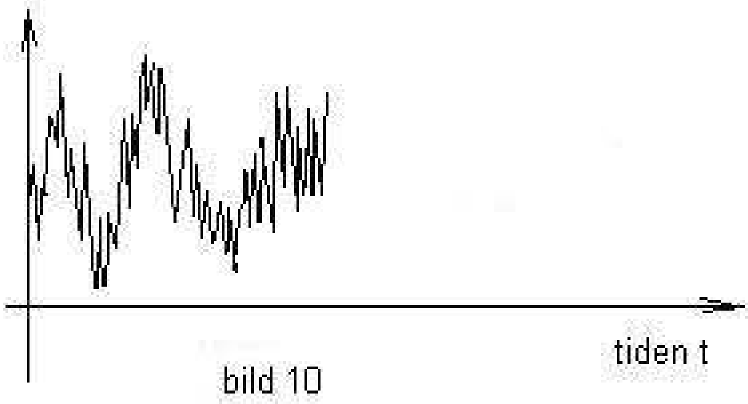




Modellen. Sätter vi in en viss summa pengar på ett bankkonto med ränta r så kommer värdet av pengarna $V(t)$ att bero på tiden t enligt den så kallade differentialekvationen

$$\frac{dV}{V} = r\ dt. \tag{2.1}$$

Förhållandet (2.1) betyder att pengasumman växer proportionellt mot hur mycket pengar som sätts in på kontot. Säg att den årliga räntan är 5%. Med 100 kr insatta under året blir då räntan 50 kr, och med 1000 kr blir räntan 50 kr. Se bild 9.



Låt $P(t)$ vara priset för en aktie vid tiden t. En vanlig modell för hur priset utvecklas följer den så kallade stokastiska differentialekvationen

$$\frac{dP}{P} = \mu \, dt + \sigma dW \tag{2.2}$$

där μ och σ är konstanter. Den relativa prisförändringen $\frac{dP}{P}$ är här under ett ögonblick dt summan av en stabil "ränta" μ och en slumpvariation vars storlek styrs av σ.

Med priset 1 kr vid tiden 0 ger denna modell en typisk prisutveckling för aktien enligt kurvan i bild 10.

Man kan visa, se t.ex. Öksendahl [Ö03], att "de allra flesta" lösningskurvorna inte har lutning någonstans. Kurvan uppvisar också ett visst mått av själv-likformighet. Det vill säga att om vi förstorar en mindre del av kurvan så liknar den hela kurvan. Mandelbrot [Man82] har studerat verkliga aktiepriskurvor och funnit både avsaknad av lutning och ett visst mått av själv-likformighet även i dessa.

Frågor som denna modell kan svara på är till exempel vad sannolikheten är att aktiekursen ligger på mellan 5 kr och 7 kr efter en viss tid. Modellen används av olika finansinstitut vid prissättning av finansiella instrument som obligationer och köprättigheter.

Svar på frågorna ges ofta efter att ett områdes area räknas ut. Det kommer sig av att det är möjligt att visa att delar av Wienerprocessens utfall direkt kan hänföras till storleken på vissa områden.

Modellen har givetvis begränsningar. Vad modellen är speciellt dålig på att modellera är stora förändringar i aktiekursen. Som vi vet kan en akties värde bara över någon dag falla nästan obegränsat och med denna modell är ett sådant skeende ej sannolikt.

References

[Ada06] Robert A. Adams. *Calculus, A Complete Course*, volume 6th ed. of *Mathematics and its Applications*. Pearson Education Canada Inc., Toronto, Ontario, 2006.

[Bac64] Louis Bachelier. Theory of speculation, the random character of stock prices, paul h cootner (editor), cambridge: Mit. translation of bachelier's 1900 doctoral thesis. 1964.

[Bro28] Robert Brown. A brief account of microscopical observations made in the months of june, july and august 1827 on the particles contained in the pollen of plants, *p*rivately circulated. 1828.

[Ein05] Albert Einstein. Uber die von der molekularkinetischen theorie der wärme geforderte bewegung von in ruhenden flussigkeiten suspendierten teilchen. *Annalen der Physik und Chemie*, 17(4):549–560, 1905.

[Koc06] Niels Fabian Helge von Koch. Une methode geometrique elementaire pour l'etude de certaines questions de la theorie des courbes plane. 1906.

[Man82] Benoit B. Mandelbrot. *The Fractal Geometry of Nature*. Mathematics and its Applications. W. H. Freeman and Company, New York, 1982.

[Ö03] B. Öksendal. *Stochastic Differential Equations: an Introduction with Applications*, volume 6th ed. of *Mathematics and its Applications*. Springer, Berlin, 2003.

[Wie23] Norbert Wiener. Differential space. *Journal of Mathematical Physics*, 2:131–174, 1923.

E-mail address: `andreas.brodin@sjofrun.se`